

ČÍSLO - JEHO PODOBY, POSTAVENIE A ÚLOHY V STAROGRÉCKEJ MATEMATIKE

TRUBENOVÁ Jaroslava, SR

Resumé

Príspevok sa venuje jednému z najvýznamnejších a najbohatších období v histórii vývoja matematiky a to obdobiu rozkvetu starogréckej matematiky a ponúka pohľad na rozmanitosť chápania pojmu čísla v tomto období.

Kľúčové slová: história matematiky, pythagorejská škola, figurálne čísla, dokonalé čísla, s priateľenými číslami.

NUMBER - ITS FORM, STATUS AND ROLES IN ANCIENT GREEK MATHEMATICS

Abstract

The paper deals with one of the most significant and wealthiest periods in the history of the development of mathematics, particularly the golden age of ancient Greek mathematics, and it provides an insight into the diversity of understanding the concept of number in this period.

Key words: history of mathematics, Pythagorean school, figurative numbers, perfect numbers and friendly numbers.

Úvod

Matematiku je potrebné prezentovať nie ako súhrn poznatkov, ktoré je nutné si osvojiť, ale ako zložku kultúry pomáhajúcu človeku orientovať sa vo svete. Táto zložka súvisí s rozvojom jazyka a vyjadrovania sa, s okolitým svetom – prírodou, technikou, rodinou, spoločnosťou. Takéto prijatie základnej filozofie akceptovania matematiky nevyhnutne vedie k integrácii matematických poznatkov do širších štruktúr.

Matematika ako súčasť kultúry – to je predovšetkým spôsob myslenia, ktorý si práca v tomto vednom odbore vyžaduje. Takéto chápanie matematiky podmieňuje zvýšený záujem o jej históriu. História matematiky v sebe skrýva veľké možnosti pre samotný poznávací a vzdelávací proces. Vzhľadom na tento aspekt sa ukázalo nevyhnutné štúdium histórie matematiky v celom priebehu jej vývoja s dôrazom na významné obdobia tvorby fundamentálnych pojmov.

Znalosť histórie matematiky stimuluje a rozvíja matematické schopnosti a umožňuje pochopiť často skryté spojenia a súvislosti. Z tohto pohľadu pozorujeme zaujímavý efekt: história matematiky motivuje pre ďalšie štúdium matematiky a napomáha lepšiemu porozumeniu matematiky, zároveň však hlbšie štúdium histórie matematiky vyžaduje hlbšie znalosti matematiky samotnej.

1 Starogrécka matematika

Matematické znalosti starých Grékov v období 8. – 7. stor. pred n. l. boli približne na rovnakej úrovni ako znalosti v Egypte a Mezopotámii. Základným znakom matematiky tohto obdobia je skutočnosť, že matematické texty neobsahujú ani náznak zdôvodnenia, dôkazu. Matematické texty začínajú slovami „Rob, ako sa robí.“ Po týchto slovách nasleduje recept, algoritmus, ako sa má postupovať, pričom sa používajú konkrétne číselné hodnoty. Od 6. stor.

pred n. l. sa grécka matematika začala rýchlo obohacovať o nové fakty. Zároveň sa vymedzuje predmet matematiky a metóda overovania správnych výsledkov. Gréci ako prví definovali ideu dôkazu a dôkazom dali logickú formu. V tomto období sa stále viac v matematickom myslení zdôrazňuje teoretická stránka, čo nakoniec viedlo k oddeleniu praktickej a teoretickej matematiky. Teoretická matematika neobsahovala len návody na riešenia úloh, ale zdôvodňovala správnosť riešenia. V tejto etape vývoja bola matematika súčasťou filozofie a rozvíjala sa preto na filozofických školách vznikajúcich vo veľkých prístavných mestách, kde sa stretávala vzdelanosť a kultúra egyptská, babylónska a grécka. Za zakladateľa gréckej matematiky sa považuje Tháles z Milétu, ktorý na svojich obchodných cestách v prvej polovici 6. stor. pred n. l. navštívil Babyloniu a Egypt, kde sa zoznámil s mnohými poznatkami matematiky a astronómie. Z hľadiska ďalšieho vývoja matematiky sa stala významnou skupina filozofov, ktorých hlavným predstaviteľom bol Pythagoras – politik, filozof, mysliteľ a matematik. Pythagoras prehlásil, že základom všetkého a všeobecného bytia je číslo – arithmos. Prisudzované sú mu tieto výroky:

*Čo je najmúdrejšie? Číslo a potom ten, kto dal veciam mená ...
Čo je najkrásnejšie? Harmónia
Čo je najmocnejšie? Myšlienka
Číslu sa podobá všetko....*

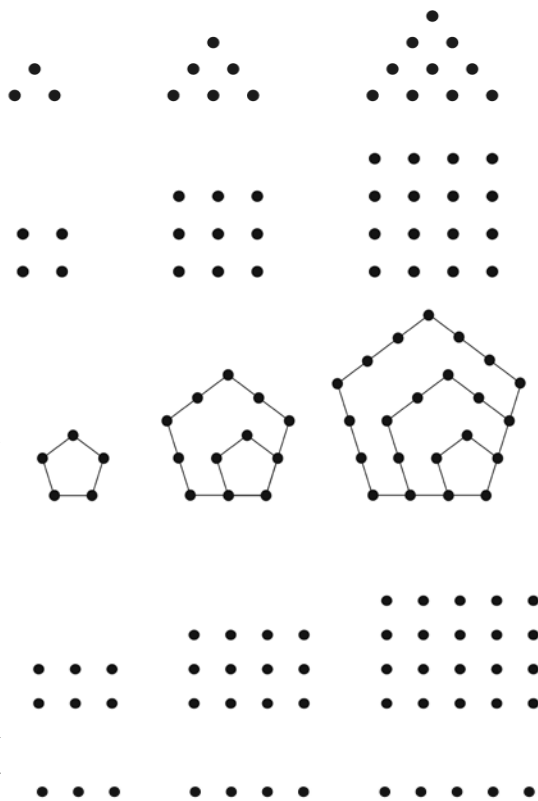
Pythagoras pochopil nutnosť kvantitatívneho popisovania javov a vzťahov, uvedomoval si obrovskú úlohu čísel. Pythagorejská škola sa zaoberala predovšetkým geometriou, aritmetikou, astronómiou a hudbou.

2 Pythagorovský pohľad na svet čísiel

Pythagorejci boli fascinovaní svetom prirodzených čísel. Snažili sa v nich hľadať systém, zákonitosti, harmóniu a snažili sa prirodzené čísla

klasifikovať. K tomuto cieľu využívali svoju geometrickú interpretáciu čísiel. Prirodzené čísla, ktoré boli často reprezentované kôpkou kamienkov triedili podľa tvarov, do ktorých bolo možné kamienky uložiť – odtiaľ pochádza názov figurálne čísla. Tak dospeli k číslam: trojuholníkovým: 3, 6, 10, ..., všeobecne $a_n = n(n+1)/2$, štvorcovým: 4, 9, 16, ..., všeobecne $a_n = n^2$, päťuholníkovým: 5, 12, 22, ..., všeobecne $a_n = n(3n - 1)/2$, šesťuholníkovým všeobecne $a_n = n(2n - 1)$.

Okrem m-uholníkových čísiel vyšetrovali pythagorejci čísla obdĺžnikové, teda čísla, ktoré je možné vyjadriť ako súčin dvoch čísiel väčších ako jedna a ktoré odpovedali usporiadaniu kamienkov do tvaru obdĺžnika. Najväčší význam prikladali obdĺžnikovým číslam 6, 12, 20, ..., všeobecne $a_n = n(n+1)$, ktoré sa tvarovo najviac blížila k číslam štvorcovým. Ďalším typom čísiel boli čísla priamkové.



Treba si uvedomiť, že jednotka nebola chápaná ako číslo, teda nebola zaradená do žiadneho z typov, ale jednotka bola chápaná ako základný stavebný kameň. Význam figurálnych čísiel nebol len v peknej názornej geometrickej interpretácii, pomocou takýchto znázornení boli objavované princípy, podľa ktorých čísla „vznikajú“. Geometrickým znázorňovaním čísiel je možno objavovať a zviditeľňovať matematické poznatky a ich dôkazy. Je dokázané, že figurálne čísla a ich „kladenie pred oči“ zohralo dôležitú úlohu pri vnímaní a pochopení podstaty matematického dôkazu.

Číslo 1 nebolo chápané ako číslo, ale ako stavebný kameň aritmetiky (základná jednotka).

Čísla 2, 3, 4, 5, ... boli chápané ako súhrny jednotiek, kladné racionálne čísla boli predstavované pomocou pomerov prirodzených čísiel.

Pythagorejci hudbu chápali v úzkom vzťahu k matematike:

- vyslovili zákon o úmernosti výšky tónu dĺžke struny alebo výške vzduchového stĺpca
- vyslovili zákon harmónie: k danému tónu, ktorý je vytvorený napr. chvejúcou sa strunou, získame tón, ktorý s ním ladí, ak strunu uchytíme tak, aby pomer dĺžok vzniknutého úseku a celej struny bol vyjadrený pomocou malých prirodzených čísiel, oktáve odpovedá pomer 1 : 2, kvinte odpovedá pomer 2 : 3, kvarte odpovedá pomer 3 : 4.



Všimnime si, že platí rovnosť $(1:2) = (3:4).(2:3)$, ktorú môžeme chápať ako vzťah medzi oktávou, kvartou a kvintou

Hudobnou úmerou bola nazývaná štvorica čísiel (12,9,8,6), pomery 6:12, 8:12, 9:12 dávajú oktávu, kvintu, kvartu. Toto aritmetické ponímanie hudby bolo doplnené aj o geometricke aspekty, štvorica (12,9,8,6) má úzky vzťah ku kocke: kocka má 6 stien, 8 vrcholov, 12 hrán a 9 rovín súmernosti.

Fascinovaní svetom čísiel, ktoré hrajú tak dôležitú úlohu, dospeli pythagorejci až k číselnému mysticismu. Jednotlivé čísla mali podľa pythagorejcov zvláštny význam a moc:

párne čísla boli ženské, nepárne mužské

číslo 4 predstavovalo spravodlivosť

číslo 5 predstavovalo manželstvo

číslo 10 predstavovalo dokonalosť a všeobecnú existenciu, pretože: $1 + 2 + 3 + 4 = 10$

číslo 1 predstavovalo základnú jednotku, bod

číslo 2 predstavovalo základnú jednotku párných čísiel, priamku

číslo 3 predstavovalo trojuholník, rovinu

číslo 4 predstavovalo štvorsten, priestor

Starí Gréci poznali aj tzv. dokonalé čísla, spriatelené čísla, pythagorejské čísla.

Číslo sa nazýva dokonalé vtedy, ak je súčtom všetkých svojich deliteľov, ktoré sú menšie ako ono samo, dokonalé čísla sú napr.: 6, 28, 496, 8 128, 33 550 336 – (známe až v r. 1436 – 1476), pretože $6 = 1 + 2 + 3$, $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

Dve čísla sa nazývajú spriatelené, ak každé číslo z tejto dvojice je súčtom deliteľov, odlišných od čísla samého, druhého čísla z tejto dvojice, spriatelené čísla sú napr. 220, 284,

17 296, 18 416 (Pierre de Fermat, 1636)

9 363 584, 9 437 056 (René Descartes, 1638)

Pythagorejské čísla: sú to také trojice čísel, ktoré sú dĺžkami strán pythagorejského trojuholníka. Najznámejší pythagorejský trojuholník má dĺžky strán 3, 4, 5. Ďalšie pythagorejské čísla (6, 8, 10), (8, 15, 17), (5,12,13), (12,16, 20), (20, 21, 29), ...

Záver

Začlenenie elementov histórie matematiky do vyučovania a učenia matematiky prináša veľa výhod pre obidva subjekty vstupujúce do vyučovacieho procesu: pre učiteľov aj pre študentov. Jednou z najväčších výhod je, že tieto prvky histórie matematiky sú veľmi účinným prostriedkom pre motiváciu študentov. Výskum potvrdil, že začlenením elementov histórie matematiky sa zlepšili predstavy a postoje nielen študentov, ale aj učiteľov. Poznanie histórie matematiky napomôže študentom pochopiť evolučný charakter tejto vedy, ako boli v priebehu histórie urobené matematické objavy, prečo a ako boli zavedené rôzne pojmy matematiky, s ktorými bežne pracujú počas svojho štúdia. Veľký prínos tohto procesu je aj v tom, že študenti sa oboznámia s procesom vzniku a vývoja matematickej symboliky, terminológie, spôsobov vyjadrovania, s objavovaním techník, výpočtových metód, ktoré sa v súčasnosti bežne používajú ale zároveň sa oboznámia aj s tým, že trvalo pomerne dlhý čas (často niekoľko storočí) kým boli vyvinuté do dnešnej podoby.

Literatúra

1. ŠEDIVÝ, O., FULIER, J. *Úlohy a humanizácia vyučovania matematiky*. Nitra, 2004, Prírodovedec č. 135, ISBN 80-8050-770-7.
2. BEČVÁŘ, J., FUCHS, E., *Historie matematiky I*. Brno, 1994.
3. BEČVÁŘ, J., FUCHS, E., *Historie matematiky I I*. Praha, Prometheus, 1997, ISBN 80-7196-046-2.
4. BEČVÁŘ, J., FUCHS, E., *Matematika v proměnách věku I*. Praha, Prometheus, 1998, ISBN 80-7196-107-8.

Lektoroval: Doc. Ing. Marián Kubliha, PhD.

Kontaktná adresa:

Jaroslava Trubenová, RNDr. PhD.,
Katedra aplikovanej informatiky,
Fakulta prírodných vied UCM, Nám. J. Herdu 2,
917 01 Trnava, SR, tel. 00421 33 5565 377 ,
e-mail: jaroslava.trubenova@ucm.sk