GEOMETRICKÉ KŘIVKY V ROVINĚ

HODAŇOVÁ Jitka – NOCAR David, CZ

Resumé

Významnou matematickou disciplinou je geometrie. Historický vývoj geometrie souvisí s rozvojem poznání a kultury lidské společnosti. První geometrické poznatky se nacházejí u Chaldejců (3. tisíciletí př. n. l.) a Egypťanů. Rozvoj řecké kultury má vliv na rozvoj matematiky a zvláště geometrie. Řečtí matematici studovali planimetrii, stereometrii, sférickou trigonometrii, optiku, ve které najdeme počátky perspektivy a studovali také tělesa a křivky. Rozvoj geometrie ovlivňoval rozvoj dalších disciplin - astronomie, fyziky a rozvoj technických disciplin. „Technická praxe“, především stavitelství potřebovaly zobrazovat prostorové objekty tak, aby bylo možné z výkresu vyčíst tvar a rozměry objektu. Důkaz o rozvoji geometrie nacházíme na zachovalých stavebních památkách. Studium rovinných křivek má své počátky ve starověku. Názvy řady křivek - Dioklova kissoida, Archimédova spirála, Perseova křivka, jsou důkazem, že tyto křivky studovali již matematikové ve starověku.

Klíčová slova: rovinné křivky, kinematická geometrie, technická praxe.

GEOMETRICAL CURVES IN THE PLANE

Abstract

Geometry is one of the most significant disciplines in mathematics. The historical development of geometry is connected with progress of knowledge and with human society culture development. The first geometrical thinking we can find in Chaldean and Egyptian empires. The development of Greek culture influenced geometry and mathematics. Greek mathematicians studied plane geometry, solid geometry, spherical trigonometry, optics and we can also find there perspective origins and they studied fields and curves. The geometry development influenced other disciplines – astronomy, physics and other technical disciplines. The technical practice like building required to display three-dimensional objects in that way, that builders could read the shape and dimension of an object from drawings (see well-kept historical monuments). The plane curve studies have their origin in ancient world. Their names like Diokles´ kissoide, Archimedes´ spiral, Perseus´ curve show, that mathematicians developed the curves in ancient world.

Key words: plane curves, kinematic geometry, technical practice

Úvod

Cílem článku G*eometrické křivky v rovině* je zdůraznit význam geometrie a především geometrických křivek v rovině pro technickou praxi. *Kinematická geometrie* není obtížným předmětem a její zařazení do vzdělávacího programu na školách přispívá u žáků a studentů k poznání významu matematiky pro technickou praxi.

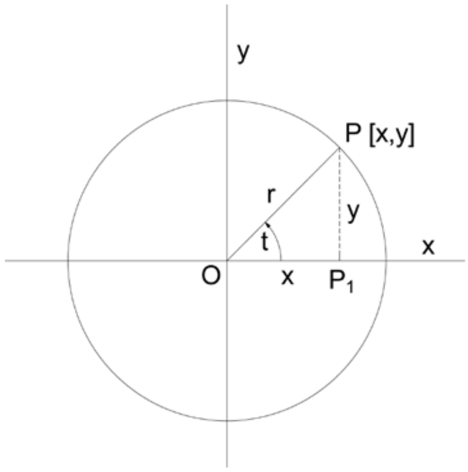
1 Parametrické vyjádření křivek

Rovnici přímky nebo kuželosečky jsme vyjadřovali jediným vztahem mezi pravoúhlými souřadnicemi $[x; y]$, nebo jediným vztahem mezi průvodičem r a amplitudou φ v polárních souřadnicích. Někdy je výhodnější místo rovnice křivky (především u technicky důležitých křivek), udávající vztah mezi souřadnicemi $[x; y]$, bodu *P* této křivky, užít dvou rovnic. První z nich vyjadřuje závislost souřadnice *x* na určité pomocné proměnné *t* a druhá závislost souřadnice *y* na téže proměnné *t*. Tuto proměnnou *t*, na níž závisí hodnoty *x* a *y*, nazýváme parametrem. Obě příslušné rovnice nazýváme parametrickými rovnicemi křivky. Vyloučíme-li z těchto rovnic parametr t, dostaneme vyjádření křivky jedinou rovnicí mezi x a y.

2 Parametrické rovnice kuželoseček

Budiž $P = [x; y]$ libovolný bod kružnice (Obr. 2.1.), jejíž poloměr je r a střed leží v počátku.

Obr. 2.1. *Parametrické rovnice kružnice*



Z obrázku 2.1. je patrno, že

$x = r\cos t$

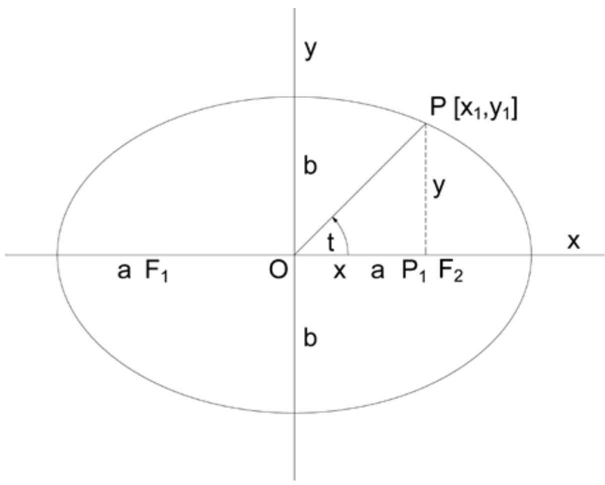
$y = r\sin t$

To jsou parametrické rovnice kružnice. Parametrem je úhel t měřený v kladném smyslu. Mění-li se parametr od 0 do 2π v kladném smyslu, opíše bod P celou kružnici. Chceme-li dostat rovnici kružnice v pravoúhlých souřadnicích, vyloučíme parametr t umocněním obou rovnic na druhou a sečtením:

$$x^2 + y^2 = r^2\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Obr. 2.2.: *Parametrické rovnice elipsy*



O souřadnicích libovolného bodu $P = [x; y]$ na elipse(viz. obr. 2.2.) platí:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

nebo

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Víme, že platí: $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

Můžeme tedy položit: $\frac{x}{a} = \cos t$, $\frac{y}{b} = \sin t$.

Potom

$$x = a\cos t$$

$$y = b\sin t$$

Jsou *parametrické rovnice elipsy*, kde úhel t je parametr. Nabývá-li parametr t hodnot od 0 do 2π v kladném smyslu, opíše bod P celou elipsu.

Z fyziky víme, že dráha tělesa vrženého vodorovně je parabola, která vznikla složením přímočarého rovnoměrného pohybu $s = v \cdot t$ a volného pádu $s = \frac{1}{2}gt^2$. Obě rovnice jsou parametrické rovnice paraboly s vrcholem v počátku souřadnic a osou v ose y. Obecně píšeme parametrické rovnice paraboly:

$$x = at$$
$$y = bt^2$$

kde t je parametr, a, b jsou reálná čísla různá od nuly. Vyloučením parametru t dostaneme známou rovnici paraboly:

$$x^2 = \frac{a^2}{b}y$$
$$x^2 = 2py.$$

Po kružnici o poloměru r se pohybuje bod konstantní rychlostí v. Určete parametrické rovnice vyjadřující pohyb daného bodu.

Za čas t je dráha $s = v \cdot t$, přičemž $s = r\varphi$, kde φ je středový úhel v obloukové míře; $r \cdot \varphi = v \cdot t$, $\varphi = \frac{vt}{r}$.

$$x = r\cos\frac{vt}{r}$$
$$y = r\sin\frac{vt}{r}$$

Závěr

Kuželosečky patří k nejdůležitějším technickým křivkám. Jejich definici je možné najít ve středoškolských učebnicích. Záměrem článku je ukázat na těsný vztah teorie rovinných křivek s technickou praxí. Jednou z nejpoužívanějších kuželoseček je kružnice. Ve stavební praxi najdeme řadu křivek složených z kruhových oblouků. S parabolou se můžeme v praxi setkat např. u parabolických zrcadel, antén, příp. jako profilovou křivkou mostních oblouků, řetězovkou či řídicí křivkou celé řady ploch. Rovinné křivky tedy najdeme v řadě aplikací technické praxe.

Literatura

1. HARANT, M., LANTA, O. *Deskriptivní geometrie*. Praha: SPN, 1965.
2. JALŮVKA, V. *Deskriptivní geometrie.* Praha: SPN, 1961.
3. MEDEK, V., ŠEDIVÝ, O. *Deskriptivní geometrie pro gymnázia.* Praha: SPN, 1987.
4. POMYKALOVÁ, E. *Matematika pro gymnázia – stereometrie*. Praha: Prométheus, 1995. ISBN 80-7196-178-7.

Lektorovali: PhDr. Jiřina Novotná, Ph.D., Mgr. Vladimír Vaněk, Ph.D.

Kontaktní adresa:

Jitka Hodaňová, Mgr., Ph.D.
Katedra matematiky, Pedagogická fakulta UP, Žižkovo nám. 5, 771 40 Olomouc, ČR, tel.: +420 585 635 706, fax +420 585 231 400, e-mail: jitka.hodanova@upol.cz

David Nocar, Mgr., Ph.D.
Katedra matematiky, Pedagogická fakulta UP, Žižkovo nám. 5, 771 40 Olomouc, ČR, tel.: +420 585 635 711, fax +420 585 231 400, e-mail: david.nocar@upol.cz