

ZISŤOVANIE VLASTNOSTÍ FUNKCIÍ EKONOMICKEJ ANALÝZY S PODPOROU INFORMAČNÝCH TECHNOLOGIÍ

ORSZÁGHOVÁ Dana, SR

Resumé

Funkcie ekonomickej analýzy s jednou alebo s viacerými premennými sú vhodným prostriedkom na formulovanie vzťahov medzi ekonomickými veličinami kvantitatívnymi metódami v oblasti obchodu a výrobnjej sféry. V príspevku sa venujeme významnej téme štúdia matematiky – rôznym vlastnostiam funkcií a ich grafickej interpretácii prostredníctvom nástrojov informačných technológií (IT). Prezentujeme ukážky z ekonomických aplikácií s vlastnosťami a grafmi funkcií s jednou premennou a s dvoma premennými. Riešenie praktických a aplikačných úloh patrí k súčasným trendom, ktoré zaznamenávame v matematickom vzdelávaní. S použitím grafických nástrojov IT efektívne zobrazíme grafy funkcií, čím sa zlepšia podmienky na interpretáciu výsledkov riešenia úloh a ich pochopenie študentmi.

Kľúčová slova: matematika, funkcie, vlastnosti funkcií, ekonomické aplikácie, grafy funkcií, informačné technológie.

THE DETECTION OF PROPERTIES OF FUNCTIONS OF ECONOMIC ANALYSIS WITH THE SUPPORT OF INFORMATION TECHNOLOGY

Abstract

Functions of economic analysis with one or more real variables are proper means for formulation of relations among economic variables by quantitative methods in the area of business market and production sphere. In this paper we deal with the important topic of mathematics study – various properties of functions and their graphs illustration by tools of information technology (IT). We present economic applied samples with properties and graphs for a function with one variable and for a function with two variables. Solving of practical and applied problems is a current trend which is noticed in mathematical education. Graphical tools of IT support efficient drawing of graphs of functions and improve possibilities for interpretation and better understanding of results of solved tasks by students.

Key words: mathematics, functions, properties of functions, economic application, graphs of functions, information technology.

Úvod

Súčasťou vzdelávania budúcich ekonómov a manažérov je aj štúdium matematiky. Zvyčajne sú na ekonomických fakultách matematické predmety zaradené do bakalárskeho stupňa štúdia. Obsahovú náplň tvoria poznatky z lineárnej algebry, diferenciálneho a integrálneho počtu. Na Fakulte ekonomiky a manažmentu Slovenskej poľnohospodárskej univerzity (SPU) v Nitre študenti absolvujú v 1. ročníku bakalárskeho štúdia skúšku z matematiky (povinné predmety) v zimnom aj v letnom semestri. V 3. ročníku je zaradený povinne voliteľný predmet Základy poistnej matematiky a od akademického roka 2011/2012 je v študijnom programe na doktorandskom stupni štúdia zaradený povinne voliteľný predmet Aplikácia matematických metód v ekonómii.

Jedným zo súčasných trendov na vysokých školách je zvyšovanie počtu študentov, ktorí sa vzdelávajú na bakalárskom alebo inžinierskom/magisterskom stupni štúdia. Nové vedomosti sa stanú ich trvalým majetkom len vtedy, keď študované poznatky a informácie dostatočne pochopia, čo podporuje aj správna predstava pojmov a asociácia s grafickou interpretáciou výsledkov.

Nevyhnutným predpokladom tohto procesu je, aby sa študenti učili hĺbkovo, s pochopením zmyslu a logiky preberanej problematiky. Matematické metódy poskytujú rôzne možnosti pre uplatnenie teoretických poznatkov v mnohých oblastiach praktickej činnosti. Preto je dôležité vyučovací proces obohacovať o ukážky aplikácií matematiky s riešením aplikačných úloh. Matematika a jej aplikácie ([6], [7]) budú pre študentov pochopiteľnejšie, ak budú spojené s konkrétnou ukážkou úlohy. Vhodným prostriedkom na prezentáciu grafov funkcií a ich vlastností sú prostriedky IT, ktoré sú spojením matematického a grafického softvéru. K softvérom používaným na zobrazovanie funkcií patria napríklad MathCAD, Matlab, Mathematica, GeoGebra.

1 Materiál a cieľ príspevku

Hlavným zdrojom materiálu pre príspevok bol vyučovací proces realizovaný Katedrou matematiky na Fakulte ekonomiky a manažmentu SPU v Nitre a štúdium odborných publikácií ([1], [2], [5]). Cieľom príspevku je prezentovať matematické vlastnosti funkcií s jednou a s viacerými premennými v aplikačných úlohách s funkciami ekonomickej analýzy. Problematikou prístupu študentov k aplikáciám matematiky (aj atraktívnou elektronickou formou) sa už niekoľko rokov podrobne zaoberáme ([3], [4]). Ukážky úloh prezentované v príspevku obsahujú:

- funkciu celkových príjmov (s jednou premennou),
- funkciu marginálnych príjmov (s jednou premennou),
- viazané extrémny funkcie s dvoma premennými,
- grafické zobrazenie funkcií v aplikačných úlohách.

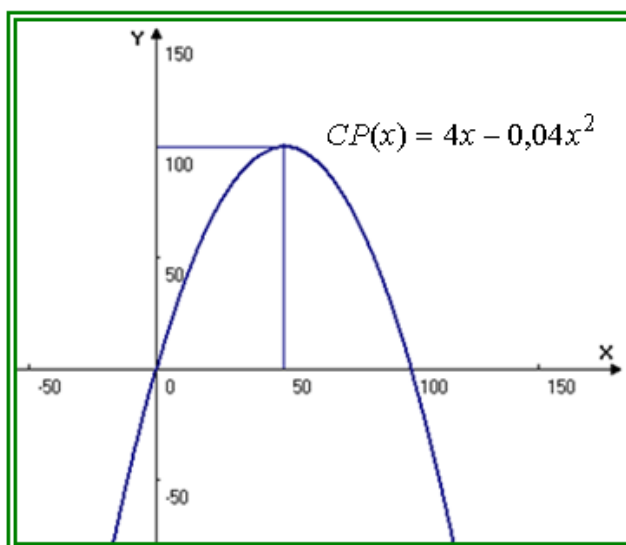
2 Funkcia celkových príjmov a funkcia marginálnych príjmov

Uvedieme ukážku použitia diferenciálneho počtu v ekonomickej analýze. Nech $CP(x)$ je funkcia celkových príjmov pre nejakú komoditu. Potom funkcia marginálnych príjmov je daná vzťahom

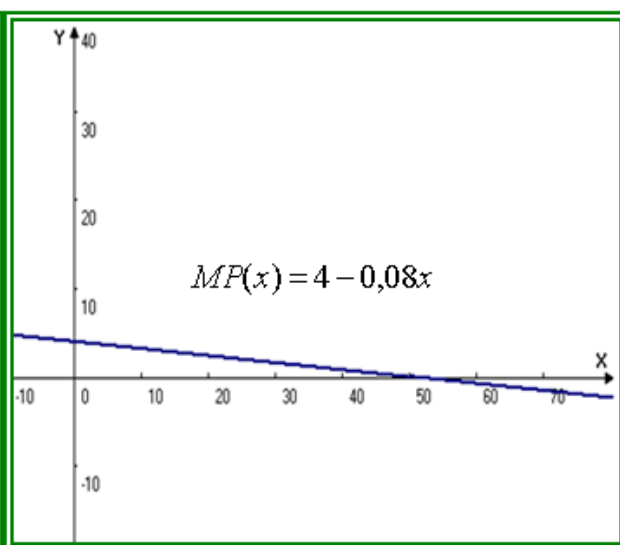
$$MP(x) = CP'(x) \quad (1)$$

Formulácia úlohy: Pre funkciu celkových príjmov $CP(x) = 4x - 0,04x^2$ máme nájsť funkciu marginálnych príjmov. Zo vzťahu (1) je zrejmé, že budeme počítať prvú deriváciu funkcie celkových príjmov. Výsledkom je funkcia marginálnych príjmov vyjadrená vzťahom

$$MP(x) = CP'(x) = 4 - 0,08x \quad (2)$$



Obr. 1: Graf funkcie $CP(x)$



Obr. 2: Graf funkcie $MP(x)$

Z grafického znázornenia uvedených ekonomických funkcií (obr. 1, obr. 2) vieme interpretovať aj ďalšie údaje, napr. pre akú úroveň x_0 budú celkové príjmy rásť, prípadne klesať. Výpočtom overíme, že pre $x_0 = 50$ budú celkové príjmy maximálne. Z grafu na obr. 2 vidíme, že funkčná hodnota $MP(50) = 0$. Grafy funkcií boli vytvorené pomocou softvéru GraphSight verzia 2.0.1.

3 Viazané extrémny funkcie dvoch premenných

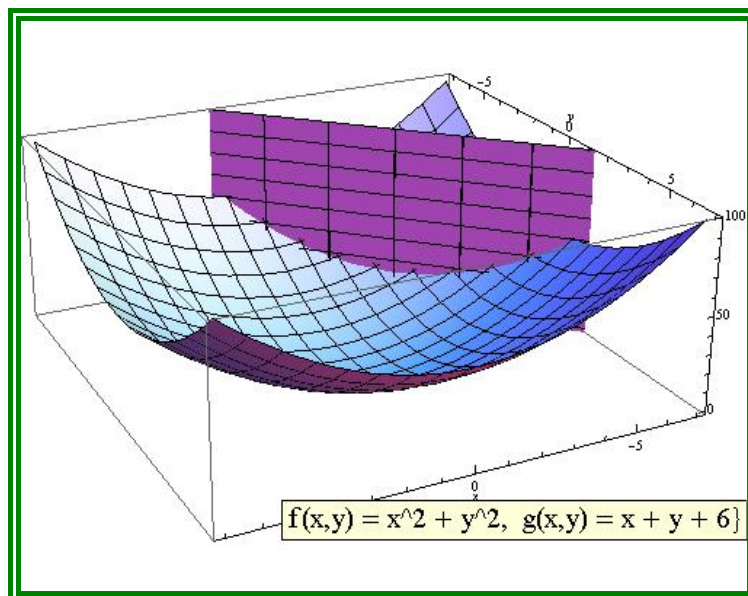
Súčasťou tém v kapitole o funkcii dvoch premenných sú aj viazané extrémny funkcie, ktoré sa v aplikáciách vyskytujú ako optimalizačné úlohy. Okrem hlavnej funkcie $f(x, y)$ je daná aj druhá funkcia – väzba $g(x, y)$, ktorá je dôležitá pre výpočet viazaných extrémov. Lagrangeova metóda výpočtu viazaných extrémov používa pomocnú funkciu nazývanú Lagrangeova funkcia

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y) \quad (3)$$

Vo výpočte sa ďalej používajú parciálne derivácie prvého a druhého rádu, ktoré sú v podmienkach prvého a druhého rádu pre kritický bod, v ktorom môže nastať extrém. Výpočet študenti pochopia, náročnejšie je predstaviť si graf funkcie a danej väzby, pretože sú to funkcie s dvoma premennými. V aplikačných úlohách bude mať funkcia f ekonomický význam funkcie užitočnosti, ktorú treba maximalizovať vo vzťahu k danej väzbe (napr. príjem domácnosti, rozpočet podniku a pod.).

Formulácia úlohy: Pre funkciu $f : z = x^2 + y^2$ nájdime viazané extrémny vo vzťahu k väzbe $g : z = x + y + 6$. Výpočtom zistíme súradnice kritického bodu $M = [-3, -3]$, v ktorom má funkcia viazané lokálne minimum a pre funkčnú hodnotu platí $f(-3, -3) = 18$.

Grafická interpretácia k danej úlohe je na obrázku 3. Grafy funkcií dvoch premenných boli vytvorené v programe Mathematica, verzia 6.



Obr. 3: Grafy funkcií f a g

4 Diskusia k výsledkom

Zobrazenie grafu funkcie patrí k základným matematickým úlohám a má svoj význam aj v aplikačných úlohách, kde budú funkcie vyjadrovať vzťahy medzi ekonomickými veličinami, napr. funkcia celkových, resp. marginálnych nákladov, príjmov, funkcia vyjadrujúca zisk, spotrebu a pod. Mnohé aplikačné úlohy obsahujú funkcie s dvoma premennými, kde na zobrazenie grafu je vhodné

použit' grafické nástroje IT. Ako sme už uviedli, k používaným programovým prostriedkom patria softvéry MathCAD, Matlab, Mathematica, Maple, GeoGebra, GraphSight, pričom niektoré softvéry sú voľne dostupné na internete. Obsahujú preddefinované nástroje a zobrazujú graf funkcie dvoch premenných ako 3D objekt. Tvorba študijných materiálov v elektronickej forme a metódy vzdelávania s využitím IT patria k trendu, ktorý sa bude ďalej uplatňovať a rozvíjať pre svoju atraktivnosť, ale aj pre efektívnosť, účinnosť a možnosti pre aktívne zapojenie študentov do procesu získavania vedomostí.

Záver

„S pomocí kníh se mnozí stávají učenými i mimo školy. Bez kníh nebývá učený nikdo ani ve škole.“ Tento výrok učiteľa národov J. A. Komenského je pravdivý a motivačný aj v dobe internetu a informačných technológií. Tlačené verzie kníh sú dostupné vo formáte pdf na internete, v elektronickej forme môžeme mnohé knihy študovať prostredníctvom tzv. čítačiek. Študijné materiály v elektronickej podobe sú v súčasnosti úspešne vytvárané a používané na všetkých univerzitách. Práca s prostriedkami informačných technológií je súčasťou vzdelania a uplatnenia mnohých ľudí, preto je potrebné zaradiť ich použitie aj do matematického vzdelávania.

Aplikačné úlohy zamerané na ekonómiu vyžadujú ovládanie matematiky a ich spojenie s odbornými poznatkami v ekonomickej oblasti. Grafické zobrazenie funkcie umožňuje lepšie pochopenie výsledkov a ich odbornú interpretáciu. Aj preto má štúdium matematických metód a ich aplikácia význam z pohľadu budúceho uplatnenia absolventov vysokých škôl v ekonomickej praxi.

Literatura

1. DRÁBEKOVÁ, J. Vizualizácia riešení vybraných ekonomických úloh pomocou softvéru GeoGebra. In Zborník príspevkov *Teoretická a edukačná transformácia matematického vzdelávania*. Nitra, SPU, 2011, s. 45-50. ISBN 978-80-552-0604-2.
2. HARSHBARGER, R., REYNOLDS, J. *Mathematical Applications*. D.C. Heath and Company, Lexington, Massachusetts, 1989. 746 p. ISBN 63-551-86.
3. ORSZÁGHOVÁ, D., GREGÁŇOVÁ, R., BARANÍKOVÁ, H., TÓTHOVÁ, D. *Multimédiá vo vyučovaní matematiky*. Nitra, SPU, 2010, s. 168, 1. vydanie. ISBN 978-80-552-0405-5.
4. ORSZÁGHOVÁ, D., GREGÁŇOVÁ, R., MATUŠEK, V. *K aktuálnym matematickým kompetenciám vo vysokoškolskom vzdelávaní v ekonomických a technických odboroch*. 1. vyd. Nitra: Slovenská poľnohospodárska univerzita, 2013. 141 s. ISBN 978-80-552-1017-9.
5. ORSZÁGHOVÁ, D., GREGÁŇOVÁ, R., KECSKÉS, N. Electronic study materials – as a complement of mathematical education at FEM SUA in Nitra. In *DIDMATECH 2013*. Komárno: Univerzita J. Selyeho, 2013, ISBN 978-80-8122-086-9.
6. ORSZÁGHOVÁ, D., GREGÁŇOVÁ, R., PECHOČIAK, T., FARKAŠOVÁ, M., DRÁBEKOVÁ, J., KECSKÉS, N. *Matematika s aplikáciami. 2. časť*. 1. vyd. Nitra : Slovenská poľnohospodárska univerzita, 2014. 196 s. ISBN 978-80-552-1138-1.
7. ORSZÁGHOVÁ, D., MATUŠEK, V., PECHOČIAK, T., BARANÍKOVÁ, H., DRÁBEKOVÁ, J. *Matematika s aplikáciami. 1. časť*. 1. vyd. Nitra : Slovenská poľnohospodárska univerzita, 2013. 312 s. ISBN 978-80-552-1093-3.

Lektorovali: doc. Ing. Zuzana Palková, PhD., doc. Ing. Vladimír Popelka, CSc.

Kontaktní adresa:

Dana Országhová, doc. RNDr. CSc.,
Katedra matematiky, Fakulta ekonomiky a manažmentu SPU v Nitre, Tr. A. Hlinku 2,
949 76 Nitra, SR, tel. 00421 37 641 4181, e-mail: dana.orszaghova@uniag.sk