

JAK ŘEŠIT PROBLÉM HLEDÁNÍ NEJVĚTŠÍHO SPOLEČNÉHO DĚLITELE

ANTOŠ Karel, CZ

Resumé

Tento článek pojednává o možnostech a způsobech zkoumání matematických problémů. Ukazuje, že výzkumný přístup v oblasti matematického bádání je metodou, pomocí které může nejen učitel učit, ale která umožňuje i žákům a studentům se učit, experimentovat a nacházet řešení různých matematických problémů. Tento tvůrčí přístup je zde ukázán na problematice hledání největšího společného dělitele přirozených čísel.

Klíčová slova: dělitelnost, přirozená čísla, experimentování, dokazování, největší společný dělitel.

HOW TO SOLVE THE PROBLEM OF FINDING THE GREATEST COMMON DIVISOR

Abstract

This article discusses the possibilities and ways of exploring mathematical problems. It shows that the research approach in the field of mathematical research is a method by which a teacher can not only teach, but which enables pupils and students to learn, make experiments and find different solutions of different mathematical problems. The creative element is shown here on the problems of finding the greatest common divisor of natural numbers.

Key words: divisibility, integers, experimenting, proving, greatest common divisor.

Úvod

V oblasti školské matematiky představuje zkoumání problémů důležitou oblast, jak žákům a studentům přiblížit matematiku jako vědu, kde tvůrčí činností se dají objevovat nové cesty k řešení různých matematických situací (3). Zpřístupnit matematiku žákům či studentům tedy nespočívá ani tak v tom, že je postavíme před hotová řešení, sdělíme jim známé postupy, definice či důkazy, ale především v tom, že jim umožníme poznat tvůrčí aspekt matematiky, kdy sami svojí tvořivostí budou řešit matematické problémy, volit různé strategie a postupy. Získané výsledky pak mohou zobecňovat, popřípadě tvořit analogické problémy.

Cílem článku je ukázat na problematice dělitelnosti přirozených čísel, jak takovéto tvůrčí postupy mohou vést k různým a zajímavým řešením, kdy z počátečního problému dojdeme různými cestami a způsoby řešení až k výsledným odpovědím či matematickým větám. Na základě inspirace problémem 1 (3) je zde zpracováno řešení problémů 2 a 3.

Oblast přirozených čísel a problematika jejich dělitelnosti se z hlediska středoškolské matematiky přímo nabízí ke zkoumání, protože se zde dají uplatnit různé matematické dovednosti a postupy dokazování, jako je systematické experimentování, či dokazování, kde řešitel na jednom problému může využít celou řadu nástrojů matematického aparátu (5).

1 Jak řešit matematické problémy

Dle knihy (3) tato kapitola pojednává o možnostech a způsobech řešení matematických problémů z hlediska stanovení vhodných postupů a strategií s cílem správnost těchto postupů buď dokázat nebo vyvrátit a v případě úspěšného vyřešení problému přeměnit počáteční hypotézy na matematické věty.

Jedním z důležitých cílů školské matematiky je naučit studenty řešit matematické problémy (4). Problémem je nějaká situace, kterou chci vyřešit a k tomuto řešení hledám způsoby a cesty. Problém má tři hlavní složky:

1. Výchozí situace
2. Cíl, kterého chceme dosáhnout
3. Cesta od výchozí situace k cíli



Obr. 1: Schéma řešení problému

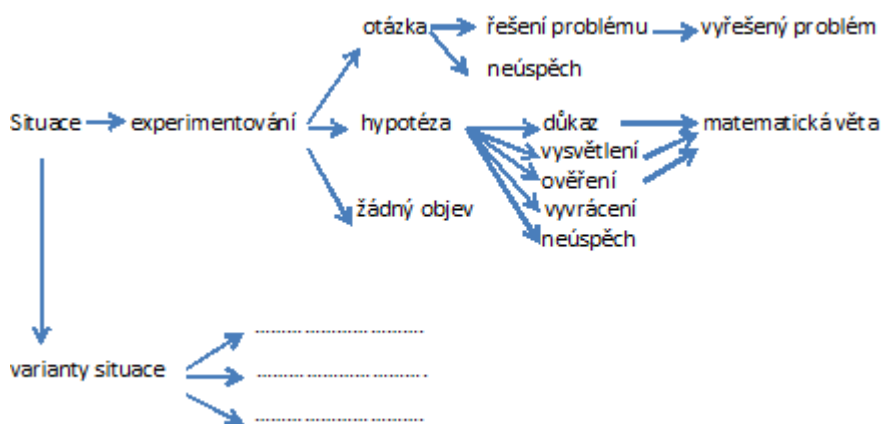
Dále je nutno určit, jak se problém dá řešit, určit strategie řešení problémů, vyslovovat hypotézy a tyto dokazovat. Po důkazu dané hypotézy se z nastoleného problému stává matematická věta.

Průběh tohoto procesu by mohl schematicky vypadat následujícím způsobem:

Matematická situace (problém) → experimentování (systematické nebo nesystematické) → hypotézy → ověření → důkaz (odpověď)

Při zkoumání matematických situací budeme problémy a na základě experimentování i hypotézy sami vytvářet. Ty potom budeme následně dokazovat (2).

Při zkoumání a řešení problémů budeme ve výuce matematiky využívat výzkumný přístup. Celý proces výzkumného přístupu se dá schematicky znázornit následujícím schématem:



Obr. 2: Schematické znázornění výzkumného přístupu

Zdůraznit by se mělo i to, že výzkumný přístup (2) je nejen metoda, pomocí které může učitel matematiku učit, ale i metoda, pomocí které se může žák nebo student matematiku učit.

2 Problém hledání největšího společného dělitele

V tomto problému se pokusíme určit největšího společného dělitele pro nekonečně mnoho přirozených čísel.

Předpokládáme dovednost nějakým způsobem spočítat největšího společného dělitele dvojice čísel a dále znaky dělitelnosti čísla 3.

Problém 1: Určete v množině $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel největšího společného dělitele všech čísel $n^3 + 17n$, kde n je přirozené číslo (3).

Řešení: nejprve musíme největšího společného dělitele objevit a pak dokázat, že je to skutečně největší společný dělitel.

Systematické experimentování:

V první fázi musíme pomocí experimentování zjistit, která čísla dosazováním pro $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ do daného výrazu dostaneme (Tabulka 1).

Tabulka 1: Problém 1

n	1	2	3	4	5	6	7
$n^3 + 17n$	18	42	78	132	210	318	462

Nyní budeme zkoumat největšího společného dělitele čísel získaných z daného výrazu uvedeným vztahem.

Vezmeme první dvě čísla z druhého řádku tabulky a budeme hledat jejich největšího společného dělitele:

$$D(18, 42) = 2 \cdot 3D(3, 7) = 6 \cdot D(3, 7) = 6$$

Největším společným dělitelem prvních dvou čísel řady je číslo 6. Proto největším společným dělitelem všech uvažovaných čísel mohou být pouze čísla 1, 2, 3, 6. Pokud dokážeme, že číslo 6 je dělitelem všech čísel generovaných polynomem $n^3 + 17n$, bude číslo 6 jejich největším společným dělitelem.

Číslo 6 je dělitelem i ostatních čísel ve druhém řádku tabulky generovaných daným polynomem, protože jsou sudá a jejich ciferný součet je dělitelný třemi.

Proto můžeme vyslovit:

Hypotéza: $(\forall n \in \mathbb{N}) 6 | (n^3 + 17n)$

Hypotézu můžeme ověřit ještě pro $n = 8, 9, 10$.

Tabulka 2: Problém 1, experimentování pro další n

n	8	9	10
$n^3 + 17n$	648	882	1170

Protože i toto ověření vyšlo, můžeme přistoupit k důkazu.

Důkaz 1: pomocí matematické indukce

1. Dokážeme, že hypotéza platí pro $n = 1$

- platí, viz předchozí experimentování s výsledky v tabulce

2. Dokážeme, že když vztah platí pro číslo n , tak potom platí i pro číslo $n + 1$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (6 | n^3 + 17n) \Rightarrow 6 | [(n + 1)^3 + 17(n + 1)]$$

Nechť $n \in \mathbb{N}$ tak, že $6 | (n^3 + 17n)$, pak

$$(n + 1)^3 + 17(n + 1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 17n + 17 = (n^3 + 17n) + 3n(n + 1) + 18$$

Zde musejí být všechny 3 sčítance dělitelné šesti. První sčítanec je podle indukčního předpokladu dělitelný šesti. Druhý sčítanec je rovněž dělitelný šesti, protože je součinem čísla 3 a $n(n+1)$, který představuje dvě po sobě jdoucí přirozená čísla a jedno z nich je tudíž dělitelné dvěma.

Poslední sčítanec je rovněž dělitelný šesti. Proto součet všech těchto tří sčítanců je rovněž dělitelný šesti.

Důkaz 2: upravíme tento výraz na faktoriálové součiny dvou sčítanců.

V centru úprav je převedení výrazu $17n$ na výraz $18n$. Postup je následující:

$$n^3 + 17n = (n^3 - n) + 18n = n(n^2 - 1) + 18n = n(n - 1)(n + 1) + 18n = (n - 1)n(n + 1) + 18n$$

V prvním sčítanci je součin tří po sobě jdoucích přirozených čísel. V nich je určitě jedno dělitelné dvěma a jedno dělitelné třemi, tudíž celý sčítanec je dělitelný šesti. Druhý sčítanec je také dělitelný číslem 6.

Pro libovolné přirozené číslo n je první sčítanec dělitelný šesti a druhý také, tedy i součet obou sčítanců je dělitelný šesti.

Důkaz 3: využijeme zápisu přirozených čísel n ve tvaru $6k + z$, kde $z = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Budeme-li přirozené číslo n dělit číslem 6, dostaneme některý ze zbytků 0, 1, 2, 3, 4, 5. Libovolné přirozené číslo n se tak dá zapsat ve tvaru $6k + z$, kde k je neúplný podíl a z je zbytek. Proto můžeme libovolné přirozené číslo n zapsat jako v jednom z následujících tvarů:

$$6k, 6k + 1, 6k + 2, 6k + 3, 6k + 4, 6k + 5.$$

Pokud tyto výrazy dosadíme do našeho výrazu $n^3 + 17n$, dostaneme:

$$\begin{aligned} n = 6k: & (6k)^3 + 17 \cdot 6k = 6(36k^3 + 17k) = 6 \cdot A \\ n = 6k + 1: & (6k + 1)^3 + 17(6k + 1) = 216k^3 + 108k^2 + 120k + 18 = 6 \cdot B \\ n = 6k + 2: & (6k + 2)^3 + 17(6k + 2) = 216k^3 + 216k^2 + 174k + 42 = 6 \cdot C \\ n = 6k + 3: & (6k + 3)^3 + 17(6k + 3) = 216k^3 + 324k^2 + 264k + 78 = 6 \cdot D \\ n = 6k + 4: & (6k + 4)^3 + 17(6k + 4) = 216k^3 + 432k^2 + 390k + 132 = 6 \cdot E \\ n = 6k + 5: & (6k + 5)^3 + 17(6k + 5) = 216k^3 + 540k^2 + 552k + 210 = 6 \cdot F \end{aligned}$$

Zde tedy dostaneme pro každé dosazení tvarů $6k + z$ do výrazu $n^3 + 17n$ výraz ve tvaru 6 krát „něco“. Tudíž tímto důkazem jsme zjistili, že číslo 6 je dělitelem výrazu $n^3 + 17n$ pro libovolná $n \in \mathbb{N}$, a proto je i jejich největším společným dělitelem.

Uvedenou hypotézu můžeme tedy přejmenovat na větu.

Věta:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) 6 | (n^3 + 17n)$$

Odpověď na náš problém tedy zní: Největší společný dělitel všech čísel $n^3 + 17n$, kde $n \in \mathbb{N}$, je číslo 6.

Analogickým způsobem jako v uvedeném příkladu budeme postupovat v řešení dalších dvou příkladů při hledání největšího společného dělitele podobně zadaných přirozených čísel. Opět si stanovíme problém a budeme jej řešit obdobně vedeným postupem.

Problém 2: Určete v množině $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel největšího společného dělitele všech čísel $n^3 + 2n$, kde n je přirozené číslo.

Řešení: opět musíme největšího společného dělitele objevit a v dalších krocích dokázat, že je to opravdu největší společný dělitel.

Systematické experimentování:

V první fázi musíme pomocí experimentování zjistit, která čísla dosazováním pro $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ do daného výrazu dostaneme. Výsledky vložíme do tabulky.

Tabulka 3: Problém 2

n	1	2	3	4	5	6	7
$n^3 + 2n$	3	12	33	72	135	228	357

Při pohledu na první člen v tabulce vidíme, že z teorie dělitelnosti přirozenými čísly (1) je zřejmé, že největší společný dělitel všech čísel musí být 1 nebo 3.

Nyní budeme zkoumat největšího společného dělitele čísel ve druhém řádku tabulky.

Číslo 3 je největším společným dělitelem všech čísel v druhém řádku tabulky. Abychom se drželi daného postupu řešení problému, vyslovíme hypotézu, kterou následně dokážeme.

Hypotéza:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) 3|(n^3 + 2n)$$

Důkaz 1: matematickou indukcí

1. Dokážeme, že hypotéza platí pro $n = 1$

- platí, viz předchozí experimentování s výsledky v tabulce

2. Dokážeme, že když vztah platí pro číslo n , tak potom platí i pro číslo $n + 1$

$$(\forall n \in \mathbb{N})(3|n^3 + 2n) \Rightarrow 3|[(n + 1)^3 + 2(n + 1)]$$

Nechť $n \in \mathbb{N}$ tak, že $3|(n^3 + 2n)$, pak

$$(n + 1)^3 + 2(n + 1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 = (n^3 + 2n) + 3n(n + 1) + 3$$

Zde musejí být všechny 3 sčítance dělitelné třemi. První sčítanec je podle indukčního předpokladu dělitelný třemi. Druhý sčítanec je rovněž dělitelný třemi, protože obsahuje číslo 3. Poslední sčítanec je rovněž dělitelný třemi. Proto součet všech těchto tří sčítanců je rovněž dělitelný třemi.

Důkaz 2: upravíme tento výraz na faktoriálové součiny dvou sčítanců.

V centru úprav je převedení výrazu $2n$ na výraz $3n$. Postup je následující:

$$n^3 + 2n = (n^3 - n) + 3n = n(n^2 - 1) + 3n = n(n - 1)(n + 1) + 3n = (n - 1)n(n + 1) + 3n$$

V prvním sčítanci je součin tří po sobě jdoucích přirozených čísel. V nich je určitě jedno dělitelné třemi, tudíž celý sčítanec bude dělitelný třemi. Druhý sčítanec je také dělitelný číslem 3. Pro libovolné přirozené číslo n je první sčítanec dělitelný třemi a druhý také, tedy i součet obou sčítanců je dělitelný třemi.

Důkaz 3: využijeme zápisu přirozených čísel n ve tvaru $3k + z$, kde $z = 0, 1, 2$.

Budeme-li přirozené číslo n dělit číslem 3, dostaneme některý ze zbytků 0, 1, 2. Libovolné přirozené číslo n se tak dá zapsat ve tvaru $3k + z$, kde k je neúplný podíl a z je zbytek. Proto můžeme libovolné přirozené číslo n zapsat v jednom z následujících tvarů:

$$3k, 3k + 1, 3k + 2.$$

Pokud tyto výrazy dosadíme do našeho výrazu $n^3 + 2n$, dostaneme:

$$n = 3k: \quad (3k)^3 + 2 \cdot (3k) = 3k^3 + 6k = 3 \cdot A$$

$$n = 3k + 1: \quad (3k + 1)^3 + 2(3k + 1) = 27k^3 + 27k^2 + 15k + 3 = 3 \cdot B$$

$$n = 3k + 2: \quad (3k + 2)^3 + 2(3k + 2) = 27k^3 + 54k^2 + 42k + 12 = 3 \cdot C$$

Zde tedy dostaneme pro každou možnost dosazení tvarů $3k + z$ do výrazu $n^3 + 2n$ výraz ve tvaru 3 krát „něco“. Tudíž tímto důkazem jsme zjistili, že číslo 3 je dělitelem výrazu $n^3 + 2n$ pro libovolná $n \in \mathbb{N}$, a proto je i jejich největším společným dělitelem.

Uvedenou hypotézu jsme dokázali třemi způsoby a můžeme ji tedy přejmenovat na větu.

Věta:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) 3|(n^3 + 2n)$$

Odpověď na náš problém tedy zní: Největší společný dělitel všech čísel $n^3 + 2n$, kde $n \in \mathbb{N}$, je číslo 3.

Zadáme nyní ještě jeden problém a opět ho budeme řešit analogicky.

Problém 3: Určete v množině $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel největšího společného dělitele všech čísel $n^2 + 23n$, kde n je přirozené číslo.

Řešení: opět musíme největšího společného dělitele objevit a v dalších krocích dokázat, že je to opravdu největší společný dělitel.

Systematické experimentování:

V první fázi musíme pomocí experimentování zjistit, která čísla dosazováním pro $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ do daného výrazu dostaneme. Výsledky opět vložíme do tabulky.

Tabulka 4: Problém 3

n	1	2	3	4	5	6	7
$n^2 + 23n$	24	50	78	108	140	174	210

Nyní budeme zkoumat největšího společného dělitele čísel ve druhém řádku tabulky.

Vezmeme první dvě čísla z dolního řádku tabulky a budeme hledat jejich největšího společného dělitele:

$$D(24, 50) = 2 \cdot D(12, 25) = 2$$

Největším společným dělitelem prvních dvou čísel řady je číslo 2. Proto největším společným dělitelem všech uvažovaných čísel mohou být pouze čísla 1 nebo 2. Pokud dokážeme, že číslo 2 je dělitelem všech čísel generovaných polynomem $n^2 + 23n$, bude číslo 2 jejich největším společným dělitelem.

Hypotéza:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) 2|(n^2 + 23n)$$

Důkaz 1: matematickou indukcí

1. Dokážeme, že hypotéza platí pro $n = 1$
 - platí, viz předchozí experimentování s výsledky v tabulce
2. Dokážeme, že když vztah platí pro číslo n , tak potom platí i pro číslo $n + 1$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (2|n^2 + 23n) \Rightarrow 2|[(n + 1)^2 + 23(n + 1)]$$

Nechť $n \in \mathbb{N}$ tak, že $2|(n^2 + 23n)$, pak

$$(n + 1)^2 + 23(n + 1) = n^2 + 2n + 1 + 23n + 23 = (n^2 + 23n) + 2n + 24$$

Zde musejí být všechny 3 sčítance dělitelné dvěma. První sčítanec je podle indukčního předpokladu dělitelný dvěma. Druhý sčítanec je rovněž dělitelný dvěma, protože obsahuje číslo 2. Poslední sčítanec je rovněž dělitelný dvěma. Proto součet všech těchto tří sčítanců je rovněž dělitelný dvěma.

Důkaz 2: upravíme tento výraz na faktoriálové součiny dvou sčítanců.

V centru úprav je převedení výrazu $23n$ na výraz $24n$. Postup je následující:

$$n^2 + 23n = (n^2 - n) + 24n = n(n - 1) + 24n = n(n - 1) + 24n = n(n - 1) + 24n$$

V prvním sčítanci bude součin dvou po sobě jdoucích přirozených čísel. V nich bude určitě jedno dělitelné dvěma, tudíž celý sčítanec bude dělitelný dvěma. Druhý sčítanec je také dělitelný číslem 2.

Pro libovolné přirozené číslo n je první sčítanec dělitelný dvěma a druhý také, tedy i součet obou sčítanců je dělitelný dvěma.

Důkaz 3: využijeme zápisu přirozených čísel n ve tvaru $2k + z$, kde $z = 0, 1$.

Budeme-li přirozené číslo n dělit číslem 2, dostaneme některý ze zbytků 0, 1. Libovolné přirozené číslo n se tak dá zapsat ve tvaru $2k + z$, kde k je neúplný podíl a z je zbytek. Proto můžeme libovolné přirozené číslo n zapsat v jednom z následujících tvarů:

$2k, 2k + 1$.

Pokud tyto výrazy dosadíme do našeho výrazu $n^2 + 23n$, dostaneme:

$$n = 2k: \quad (2k)^2 + 23 \cdot (2k) = 4k^2 + 46k = 2 \cdot A$$

$$n = 2k + 1: \quad (2k + 1)^2 + 23(2k + 1) = 4k^2 + 50k + 24 = 2 \cdot B$$

Zde tedy dostaneme pro každou možnost dosazení tvarů $2k + z$ do výrazu $n^2 + 23n$ výraz ve tvaru 2 krát „něco“. Tudíž tímto důkazem jsme zjistili, že číslo 2 je dělitelem výrazu $n^2 + 23n$ pro libovolná $n \in \mathbb{N}$, a proto je i jejich největším společným dělitelem.

Uvedenou hypotézu jsme dokázali třemi způsoby a můžeme ji tedy přejmenovat na větu.

Věta:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 2 | (n^2 + 23n)$$

Odpověď na náš problém tedy zní: Největší společný dělitel všech čísel $n^2 + 23n$, kde $n \in \mathbb{N}$, je číslo 2.

Poté, co jsme zadali problémy 2 a 3 a řešili je analogicky jako v prvním vzorovém příkladu, jsme si procvičili, jak řešit matematické problémy systematickým experimentováním, následným zobecněním vedoucím k vyslovení hypotézy a dokázáním této hypotézy. Samozřejmě stačí, když důkaz je jeden.

Závěr

V článku Jak řešit matematické problémy jsme si na problematice dělitelnosti přirozenými čísly ukázali, jaké možnosti při řešení problémů skrývá matematika z hlediska tvůrčích přístupů, které žák či student může využít. Chtěli jsme ukázat, že student nemusí být odkázán jen na pasivního příjemce matematických postulátů, ale že svá a mnohdy novátorská řešení může přímo sám i vytvářet. Ukázali jsme, jak systematické experimentování může vést k vyřešení zadaného problému, a jak dál s běžnými středoškolskými nástroji můžeme svá zjištění zobecňovat, dokazovat a vytvářet na nich matematické teorie.

Závěrem je důležité zmínit, že tento tvůrčí přístup by měl být na hodinách matematiky na všech stupních škol rozvíjen, proto je zde nezastupitelná role učitele, který by měl žákům a studentům tyto cesty ukazovat a s nimi je rozvíjet, aby při řešení matematických problémů co nejvíce dokázali tvůrčí aspekt matematiky využívat a samostatně problémy řešit.

Literatura

1. CALDA, E., PETRÁNEK, O., ŘEPOVÁ, J. Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť. Praha: Prometheus, 2006. ISBN 80-7196-041-1.
2. FROBISHER, L. Problems, Investigation and Investigative Approach. In: Issue in Teaching Mathematics. Cassel London 1994.
3. KOPKA, J. Umění řešit matematické problémy. Ústí n. Labem: UJEP, 2013. ISBN 978-80-903625-5-0.
4. KOPKA, J. Zkoumání ve školské matematice. Ružomberok: Katolícka Univerzita, 2005. ISBN 80-8084-064-4.
5. POLÁK, J. Přehled středoškolské matematiky. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-356-1.

Kontaktní adresa:

Karel Antoš, Ing. Bc.,
Katedra přírodních věd, VŠTECB v Českých Budějovicích, Okružní 517/10, 370 01 České
Budějovice, +420 387 842 166, kaant@seznam.cz