

PROBLÉMY ŠTUDENTOV S POCHOPENÍM POJMU LIMITA POSTUPNOSTI

KLEPANCOVÁ Michaela, CZ

Resumé

Pojem limity a hlavne jeho formálna definícia, aj vo svojej najjednoduchšej podobe – ako limita postupnosti – patrí z hľadiska vyučovacieho procesu k náročným a problematickým. U väčšiny študentov ani po absolvovaní kurzu matematickej analýzy nedôjde k úplnému porozumeniu pojmu limita a ich predstava tohto pojmu nezodpovedá korektnej definícii limity. V dôsledku neúplného pochopenia či zabudnutia naspamäť naučenej definície limity postupnosti sa u študentov môžeme stretnúť s ich vlastnými „definíciami“ tohto pojmu, ktoré nezodpovedajú obsahu skutočnej definície. V príspevku sme sa snažili identifikovať najčastejšie sa vyskytujúce formulácie, ktoré študenti považujú za správnu definíciu limity postupnosti. V príspevku tiež poukazujeme na možnosť ako týmto nesprávnym predstavám študentov o tomto pojme predchádzať, prípadne ich korigovať.

Kľúčové slová: pojem limity, formálna definícia limity postupnosti, matematická analýza.

STUDENTS MISUNDERSTANDING OF THE NOTION OF LIMIT OF SEQUENCE

Abstract

The concept of limit and especially its formal definition even in its simplest form – as a limit of a sequence – belongs in terms of learning process to difficult and problematic ones. Most students even after completion of course of Mathematical Analysis will not be able to completely understand the term of limit and their imagination of this concept does not correspond with the formal definition of limit. We can encounter various self-constructed definitions of students which may be caused due to an incomplete understanding or forgetting of learned definition of the limit of sequence, but in the end they does not meet the formal definition content. The contribution is focused on the identification of the most common formulations which students consider as correct. The contribution also points out the opportunity to prevent the students misconceptions in this term, alternatively to rectify them.

Key words: notion of limit, formal definition of limit of sequence, calculus.

Úvod

Viacere štúdie (napr. [1], [2], [3], [4]), prax mnohých pedagógov, ale aj naše vlastné skúsenosti potvrdzujú známu skutočnosť, že pochopenie formálnej definície limity postupnosti spôsobuje študentom značné ťažkosti. V dôsledku toho sa študenti často uchýľujú k pamäťovému učeniu či memorovaniu definície limity postupnosti. Absencia porozumenia obsahu formálnej definície limity postupnosti má samozrejme za následok nepochopenie ďalších fundamentálnych pojmov matematickej analýzy, definovaných pomocou tohto pojmu. V dôsledku neúplného pochopenia či zabudnutia naspamäť naučenej definície limity postupnosti sa u študentov môžeme stretnúť s ich vlastnými „definíciami“ tohto pojmu, ktoré nezodpovedajú obsahu formálnej definície, t.j.

Číslo L sa nazýva limitou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak ku každému kladnému číslu ε existuje také prirodzené číslo n_0 , že pre všetky $n > n_0$ platí $|a_n - L| < \varepsilon$.

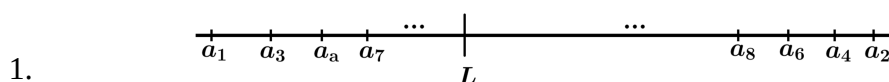
1 Nesprávne definície limity postupnosti

Študenti najčastejšie za správnu definíciu najčastejšie považujú jednu z nasledujúcich formulácií:

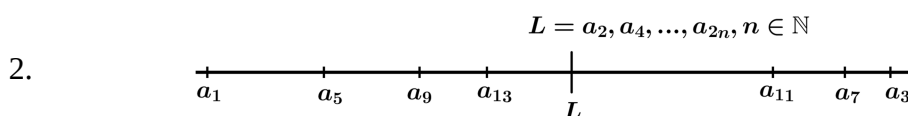
- *Nesprávna definícia 1.* Číslo L sa nazýva limitou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak jej členy a_n s rastúcim n ležia bližšie a bližšie k číslu L .
- *Nesprávna definícia 2.* Číslo L sa nazýva limitou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak jej členy a_n s rastúcim n ležia bližšie a bližšie k číslu L , ale nikdy ho nedosiahnu.
- *Nesprávna definícia 3.* Číslo L sa nazýva limitou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak pre nekonečne veľa členov postupnosti platí, že ich vzdialenosť od čísla L môže byť menší ako ľubovoľné, vopred dané číslo ε .

Jednou z možností ako študentov presvedčiť o nesprávnosti „ich“ definícií je samozrejme uvedenie vhodných príkladov, prostredníctvom ktorých je možné poukázať na rozdiely v obsahu uvedených „nesprávnych definícií“ a korektnej definície limity postupnosti. Môžeme tak urobiť aj prostredníctvom nasledujúceho príkladu.

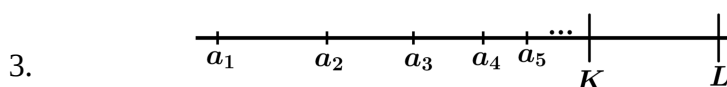
Príklad. Určte, ktoré z nasledujúcich, graficky určených postupností 1., 2., až 5 sú podľa uvedených „definícií“ konvergentné a číslo L je ich limitou.



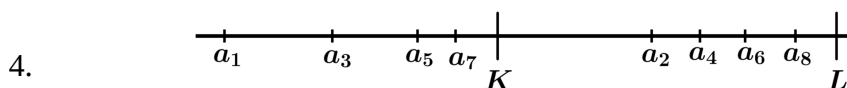
Obr. 1 – Postupnosť 1



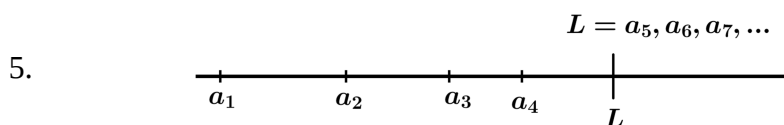
Obr. 2 – Postupnosť 2



Obr. 3 – Postupnosť 3



Obr. 4 – Postupnosť 4



Obr. 5 – Postupnosť 5

Riešenie. Napríklad postupnosť 1 je podľa korektnej definície konvergentná a jej limitou je číslo L , no podľa „nesprávnej definície 1“ konvergentná nie je, keďže napríklad platí $|a_{2n+1} - L| < |a_{2n} - L|$, čo je v rozpore s obsahom „nesprávnej definície 1“.

Naopak, postupnosť 3 je podľa správnej definície limity postupnosti síce konvergentná, no číslo L nie je jej limitou. Ale podľa „nesprávnej definície 1“ je táto postupnosť konvergentná a jej limitou je číslo L . To či je postupnosť 1, 2, ..., 5 podľa uvedených „definícií“ konvergentná a súčasne je číslo L jej limitou, je uvedené v nasledujúcej tabuľke:

Tabuľka 1: Konvergencia podľa nesprávnych definícií limity postupnosti

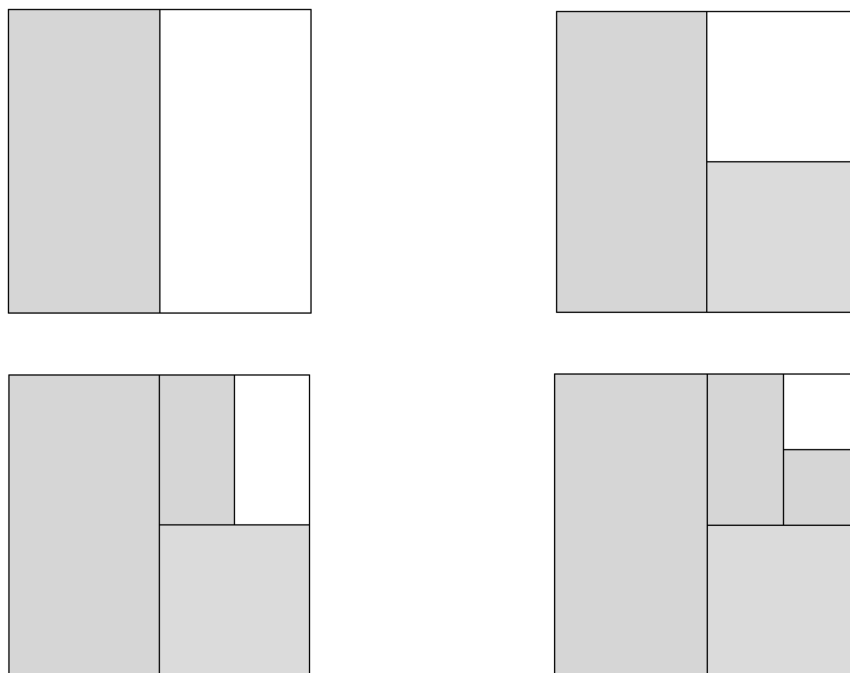
Definícia	Postupnosť 1	Postupnosť 2	Postupnosť 3	Postupnosť 4	Postupnosť 5
„Správna definícia“	číslo L je limitou	číslo L je limitou	číslo L nie je limitou	číslo L nie je limitou	číslo L je limitou
Nesprávna definícia 1	číslo L nie je limitou	číslo L nie je limitou	číslo L nie je limitou	číslo L nie je limitou	číslo L je limitou
Nesprávna definícia 2	číslo L nie je limitou	číslo L nie je limitou	číslo L je limitou	číslo L nie je limitou	číslo L nie je limitou
Nesprávna definícia 3	číslo L je limitou	číslo L je limitou	číslo L nie je limitou	číslo L je limitou	číslo L je limitou

Samozrejme, je možné identifikovať aj ďalšie intuitívne, neúplné či mylné predstavy študentov a ich „nesprávne definície“ pojmu limita. Tie je možné následne odstrániť či „skorigovať“ uvedením dostatočného množstva príkladov, ktoré nebudú v súlade s takýmito predstavami resp. „definíciami“ pojmu limita postupnosti, čo by malo v mysliach študentov nastoliť potrebu ich zmeny. No aj pre skúseného učiteľa môže byť takáto identifikácia mylných predstáv študentov, vyplývajúcich z nedôkladného pochopenia definície limity postupnosti, a ich následná náprava pomerne náročná.

Podľa nášho názoru, jedným zo spôsobov, umožňujúcim do istej miery vzniku chybných formulácií definície limity postupnosti predchádzať, je zaraďovanie (v rámci propedeutiky pojmu limita) vhodných motivačných príkladov, umožňujúcim na intuitívnej úrovni „rozobrať“ problematické časti formálnej definície limity postupnosti. Myslíme si, že do istej miery môžeme našim študentom pomôcť k správne pochopeniu definície limity postupnosti aj prostredníctvom nasledujúcich príkladov.

2 Vyfarbovanie štvorca I

Nech je daný štvorec so stranou $a = 1$. Rozdeľme ho na dva rovnaké obdĺžniky, pričom jeden z nich vyfarbíme. Vyberme si jeden z nich, rozdeľme ho na dve časti (tentokrát to budú štvorce), a opäť jednu z nich vyfarbíme. Zase zoberme jeden zo štvorčekov, rozdeľme ho na dva zhodné obdĺžniky, a jeden z nich vyfarbíme, atď. (obr. 6). Zaujímá nás, aká časť základného štvorca bude vyfarbená po jednotlivých krokoch.



Obr. 6 – Vyfarbovanie štvorca 1

Riešenie. Po prvom kroku bude obsah vyfarbenej plochy $S_1 = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$. Po druhom kroku zostane vyfarbená časť s obsahom $S_2 = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$. Po treťom kroku budeme mať vyfarbenú plochu s obsahom $S_3 = \frac{7}{8} = 1 - \frac{1}{8}$. Analogicky po ďalšom kroku dostávame $S_4 = \frac{15}{16} = 1 - \frac{1}{16}$. Ak by sme pokračovali v tomto postupe, po n -tom kroku bude mať vyfarbená časť obsah $S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$; kde $n \in \mathbf{N}$. Uvedeným spôsobom sme teda definovali postupnosť $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$. Je zrejmé, že v tomto procese vyfarbovania štvorca môžeme pokračovať donekonečna. Keďže hodnoty členov $S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$ postupnosti $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa s rastúcim $n \in \mathbb{N}$ zväčšujú a pre každé $n \in \mathbb{N}$ tiež platí $0 < 1 - \frac{1}{2^n} < 1$, hodnoty členov postupnosti $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa s rastúcim $n \in \mathbb{N}$ blížia k číslu 1. Inými slovami, hodnoty členov $S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$ postupnosti $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa s rastúcim $n \in \mathbf{N}$ odlišujú od čísla 1 stále menej a menej. Skúmajme teraz bližšie spôsob, akým sa členy postupnosti $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ blížia k číslu 1. Za týmto účelom si vyjadríme hodnoty niekoľkých členov postupnosti $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ v tvare desatinného čísla, t.j.

n	S_n
$n = 1$	$S_1 = 0,5$
$n = 2$	$S_2 = 0,75$

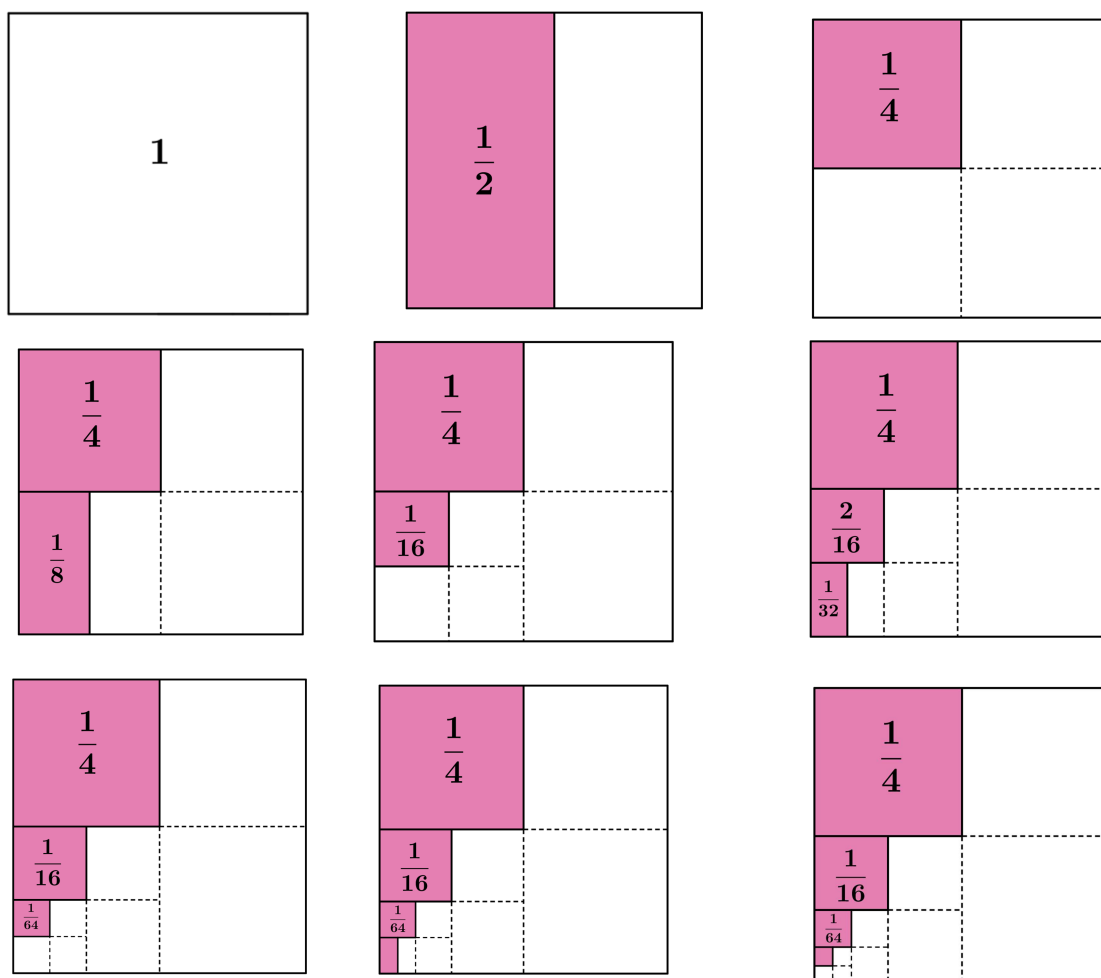
$n=3$	$S_3 = 0,875$
$n=4$	$S_4 = 0,9375$
$n=5$	$S_5 = 0,96875$
$n=6$	$S_6 = 0,984375$
$n=7$	$S_7 = 0,9921875$
$n=8$	$S_8 = 0,99609375$
$n=9$	$S_9 = 0,998046875$
$n=10$	$S_{10} = 0,999023437$
$n=11$	$S_{11} = 0,999511718$

Všimnime si, že všetky členy, začínajúc členom S_4 majú na prvom mieste za desatinnou čiarkou číslicu 9, čo znamená, že členy S_n , kde $n \geq 5$, sa od čísla 1 líšia o menej ako 0,01. Podobne, hodnoty všetkých členov, začínajúc členom S_7 sa už od čísla 1 líšia o menej ako 0,001, čiže člen S_6 je posledným členom postupnosti $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, ktorý sa od čísla 1 líši o viac ako 0,001. Ak by sme za ε volili ľubovoľné kladné čísla, zrejme by sme v našej postupnosti $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ vždy dokázali určiť taký člen S_{n_0} , že hodnoty všetkých nasledujúcich členov (t.j. členov S_n s indexom $n > n_0$) sa od čísla 1 budú líšiť o menej ako ε . Inak povedané, neexistuje žiadna „hranica“ stojaca pred číslom 1, t.j. číslo $1 - \varepsilon$, ktorú členy postupnosti $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ neprekročia. Naopak, nech zoberieme $\varepsilon > 0$ akokoľvek malé, vždy existuje také $n_0 \in \mathbb{N}$, že všetky členy s indexom väčším ako n_0 už padnú do intervalu $(1 - \varepsilon, 1)$.

Tento záver môžeme zhrnúť nasledovne: Ku každému $\varepsilon > 0$ existuje také $n_0 \in \mathbb{N}$, že všetky členy S_n postupnosti $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ s indexom väčším ako n_0 (t.j. $n > n_0$) sa už od čísla 1 líšia o menej ako ε . Stručne zapísané $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 \quad 1 - \frac{1}{2^n} < \varepsilon$.

3 Vyfarbovanie štvorca II

Nech je daný štvorec so stranou $a=1$. V tomto prípade budeme pri jeho zafarbovaní postupovať nasledovne: Rozdelíme ho na dva rovnaké obdĺžniky, pričom jeden z nich vyfarbíme na ružovo. Takto zafarbený obdĺžnik rozdelíme na dva zhodné štvorce, pričom jeden z nich opäť vyfarbíme na bielo (obr. 7). Tento nabiele vyfarbený štvorec opäť rozdelíme na polovice a jednu z nich zafarbíme na ružovo. V striedavom zafarbovaní či „odfarbovaní“ polovice obsahu útvaru, s ktorým sme narábali v predchádzajúcom kroku, môžeme pokračovať ľubovoľne dlho. Aká časť pôvodného štvorca zostane biela?



Obr. 7 – Vyfarbovanie štvorca 2

Riešenie. Po prvom kroku bude obsah nevyfarbenej resp. bielej plochy $a_1 = 1 - \frac{1}{2}$. Po druhom kroku zostane vyfarbená časť s obsahom $a_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4}$. V ďalších krokoch pre obsah bielej plochy resp. pre členy postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dostávame:

$$a_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8},$$

$$a_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{32} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} \right),$$

$$a_5 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{32} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} \right) - \frac{1}{2^5},$$

⋮

$$a_{2n} = 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^n} \right) = 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{\frac{1}{4^n} - 1}{\frac{1}{4} - 1} = 1 - \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{4^n} \right), \text{ kde } n \in \mathbb{N},$$

$$a_{2n+1} = 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^n} \right) - \frac{1}{2^{2n+1}} = 1 - \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{4^n} \right) - \frac{1}{2^{2n+1}}, \text{ pre } n \in \mathbb{N}.$$

Keďže pre každé $n \in \mathbb{N}$ je $1 - \frac{1}{4^n} < 1$, potom tiež platí $a_{2n} = 1 - \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{4^n} \right) > 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Pre každé $n \in \mathbb{N}$ je $\frac{1}{2^{2n+1}} > 0$, čiže $a_{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{4^n} \right) - \frac{1}{2^{2n+1}} = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2^{2n}} < \frac{2}{3}$. To však znamená, že členy s párnym indexom, t.j. a_{2n} , sa s rastúcim n k číslu $\frac{2}{3} \equiv 0, \bar{6}$ približujú na číselnej osi „sprava“ a členy s nepárnym indexom t.j. a_{2n+1} , sa k číslu $\frac{2}{3} \equiv 0, \bar{6}$ približujú na zas „zľava“. Aj v tomto prípade si niekoľko prvých členov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vyjadríme v tvare desatinného čísla.

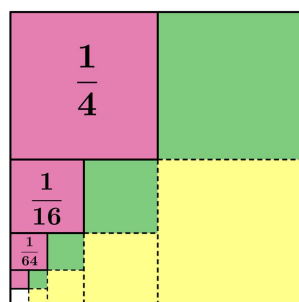
n	a_n
$n=1$	$a_1 = 0,5$
$n=2$	$a_2 = 0,75$
$n=3$	$a_3 = 0,625$
$n=4$	$a_4 = 0,6875$
$n=5$	$a_5 = 0,65625$
$n=6$	$a_6 = 0,671875$
$n=7$	$a_7 = 0,6640625$
$n=8$	$a_8 = 0,66796875$

Všimnime si, že všetky členy, začínajúc číslom a_3 , majú na prvom mieste za desatinnou čiarkou číslicu 6, čo znamená, že všetky tieto členy sa od čísla $\frac{2}{3} \equiv 0, \bar{6}$ líšia o menej ako 0,06.

Nezabudnime, že na rozdiel od predošlého príkladu však naša postupnosť nie je monotónna, t.j. „približovanie“ nastáva z oboch strán. To však znamená, že všetky členy našej postupnosti počnúc tretím členom už ležia v intervale $a_n \in \left(\frac{2}{3} - 0,06; \frac{2}{3} + 0,06 \right)$. Zvoľme nejaké $\varepsilon > 0$. Potom fakt, že všetky členy postupnosti okrem konečného počtu (resp. počnúc istým členom) padnú do vyššie uvedeného intervalu môžeme zapísať $a_n \in \left(\frac{2}{3} - 0,06; \frac{2}{3} + 0,06 \right)$, alebo pomocou absolútnej hodnoty

$$\left| a_n - \frac{2}{3} \right| < 0,06. \text{ Analogicky z pre ľubovoľné } \varepsilon > 0 \text{ by tento zápis mal tvar } \left| a_n - \frac{2}{3} \right| < \varepsilon.$$

Poznámka. Skutočnosť, že limitou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je číslo $\frac{2}{3} \equiv 0, \bar{6}$ môžeme „vidieť“ aj z obr. 8



Obr. 8

Záver

Pojem limity a hlavne jeho formálna definícia, aj vo svojej najjednoduchšej podobe – ako limita postupnosti – patrí z hľadiska vyučovacieho procesu k náročným a problematickým. Jej nedôkladné a nesprávne osvojenie má zrejme „na svedomí“ aj neskoršie problémy v úzko nadväzujúcich oblastiach – v diferenciálnom a integrálnom počte, resp. pri nekonečných číselných radoch. V príspevku sme sa snažili identifikovať najproblematickejšie časti formálnej definície limity postupnosti a uvádzame príklady, ktoré podľa nášho názoru môžu študentom pomôcť prekonať niektoré ťažkosti, spojené s dôkladným pochopením tohto pojmu.

Literatúra

1. CORNU, B. Limits. In D. O. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991. pp. 153-166. ISBN 978-0-306-47203-9.
2. COTTRILL, J. et al. Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior*. 1996, Volume 15, pp. 167-192. ISSN 0732-3123.
3. GÜÇLER, B. Examining the discourse on the limit concept in a beginning-level calculus classroom. *Educational Studies in Mathematics*. 2012, Volume 82, pp. 439–453. ISSN 1573-0816. [Dostupné z: http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10649-012-9438-2](http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10649-012-9438-2)
4. ROH, K. H. Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics*. 2008, Volume 69, pp. 217-233. ISSN 1573-0816. [Dostupné z: http://sigmaa.maa.org/rume/crume2011/RUME2011_FinalSchedule_files/ContributedReportsShortPapers/Oehrtman_proceedings.pdf](http://sigmaa.maa.org/rume/crume2011/RUME2011_FinalSchedule_files/ContributedReportsShortPapers/Oehrtman_proceedings.pdf)

Kontaktní adresa:

Michaela Klepancová, Mgr. Ph.D.,
Katedra přírodních věd, Vysoká škola technická a ekonomická, Okružní 10, 370 01 České Budějovice, ČR, tel.: +420 387 842 185, e-mail: klepancova@mail.vstecb.cz