

JAK NA HYPERBOLU S GEOGEBROU

KRIEG Jaroslav, CZ

Resumé

Článek ukazuje, jak pomocí GeoGebry snadno řešit úlohy, které vedou na konstrukci hyperboly, případně jak lehce zkonstruovat hyperbolu daných parametrů.

Klíčová slova: hyperbola, planimetrická definice hyperboly, hyperbola jako algebraická křivka 2. stupně, kuželosečka daná pěti body v GeoGebře, řezy na rotační kuželové ploše, hyperbola jako množina bodů dané vlastnosti.

HOW TO HYPERBOLA WITH GEOGEBRA

Abstract

The article shows how to use GeoGebra easily solve problems that lead to the construction of a hyperbola, or how easily construct hyperbola given parameters.

Key words: hyperbola, planimetric definition hyperbola, hyperbola as an algebraic curve 2nd degree, conic section given five points in GeoGebra, cuts on the rotary conical surface, hyperbola as a set of points given property.

Úvod

Hyperbola je kuželosečka, jejíž konstrukce činí studentům potíže, protože její definice není tak názorná jako například u kružnice, elipsy nebo paraboly. Hyperbola ostatně jako všechny kuželosečky vznikne vhodným rovinným řezem rotační kuželové plochy a to takovým, že daná rovina řezu je rovnoběžná se dvěma různými povrchovými přímkami a neprochází vrcholem rotační kuželové plochy. Na gymnáziu se hyperbola obvykle zavádí následující **planimetrickou** definicí.

1 Definice hyperboly

V rovině jsou dány dva různé pevně zvolené body F_1, F_2 . Množina bodů X roviny, které mají od bodů F_1, F_2 konstantní absolutní hodnotu rozdílu vzdáleností rovnou kladnému číslu $2a$, se nazývá **hyperbola**; (viz (1), (2)) tj.

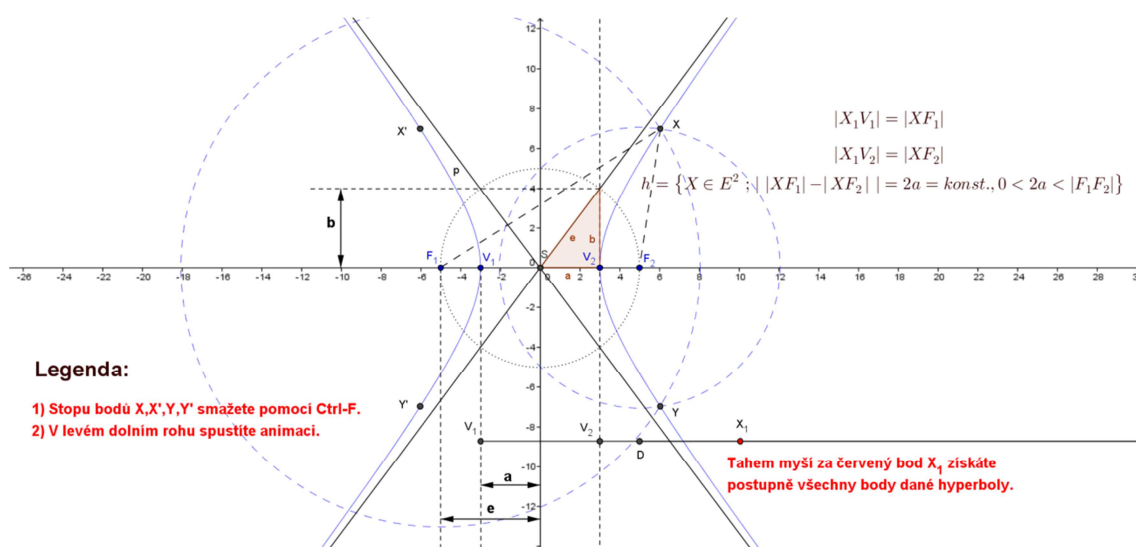
$$h = \{ X \in R^2; \left| |XF_1| - |XF_2| \right| = 2a = \text{konst.}, 0 < 2a < |F_1F_2| = 2e \}.$$

- Body F_1, F_2 jsou **ohniska** této hyperboly, střed S úsečky F_1, F_2 je **střed** hyperboly, vzdálenost ohnisek $|F_1F_2| = 2e$ se nazývá **ohnisková vzdálenost** a vzdálenost ohnisek od středu hyperboly, tj. $|SF_1| = |SF_2| = e$ se nazývá **výstřednost** nebo také **excentricita** hyperboly. Podle definice platí $a < e$.
- Hyperbola se skládá ze dvou částí, které nazýváme **větvemi** hyperboly. Totiž výrazy $|XF_1| - |XF_2|$ a $|XF_2| - |XF_1|$ jsou různé (liší se znaménkem) a tudíž větve hyperboly nemají žádný společný bod.
- Hyperbola je **osově souměrná** podle přímky F_1F_2 , která protíná hyperbolu v **hlavních vrcholech** V_1, V_2 a je **středově souměrná** podle středu S úsečky F_1F_2 .

- Úsečka V_1V_2 se nazývá **hlavní osa** a vzdálenost $|V_1V_2| = 2a$ je **velikost (délka) hlavní osy**.
 - Úsečky SV_1 a SV_2 se nazývají **hlavní poloosy** a vzdálenost $|SV_1| = |SV_2| = a$ je **velikost (délka) hlavní poloosy**.
 - Na ose úsečky V_1V_2 (resp. F_1F_2) leží tzv. **vedlejší osa hyperboly** a **vedlejší poloosa hyperboly** je definovaná jako úsečka délky b , pro kterou platí vztah $e^2 = a^2 + b^2$. Vedlejší osa podle výše uvedené definice neprotíná hyperbolu v žádném bodě.
 - Hyperbola je plně určena libovolnou dvojicí prvků vybraných z prvků a, b, e a platí $e > a, b$.
 - Pravoúhlý trojúhelník s přeponou e a odvěsnami a, b se nazývá **charakteristický trojúhelník hyperboly**. Je-li tento charakteristický trojúhelník rovnoramenný ($a = b$), pak se jedná o tzv. **rovnosoosou hyperbolu**.
 - Bod X je **vnitřní bod hyperboly** tehdy a jen tehdy, když $||XF_1| - |XF_2|| > 2a$.
 - Bod X je **bod hyperboly** právě tehdy, když $||XF_1| - |XF_2|| = 2a$.
 - Bod X je **vnější bod hyperboly**, právě když platí $||XF_1| - |XF_2|| < 2a$.
- Tato definice nám umožní tzv. **bodovou konstrukci hyperboly**.

2 Bodová konstrukce hyperboly

Následující obrázek, sestavený v GeoGebře (3), ukazuje jak zkonstruovat jednotlivé body ležící na hyperbole pomocí výše uvedené planimetrické definice.



Obr. 1 – Konstrukce hyperboly podle planimetrické definice (4)

3 Hyperbola jako algebraická křivka 2. stupně

3.1 Definice

Množina bodů $X = [x, y]$ v rovině takových, že splňují rovnost

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

kde koeficienty a, b, c, d, e, f jsou reálná čísla a $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ se nazývá **algebraická křivka 2. stupně (kuželosečka)**.

3.2 Poznámka

Abychom mohli určit koeficienty $a, b, c, d, e, f \in R$ z rovnosti

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

musíme znát souřadnice pěti bodů v rovině, které leží na dané kuželosečce.

3.3 Příklad

Je dáno pět bodů v rovině o kartézských souřadnicích

$$A = [4, 4], B = [-2, 4], C = [2, 2], D = [4, -2], E = [-4, 0].$$

Nalezněme analytické vyjádření dané kuželosečky.

Řešení

Vydeme z obecné rovnice kuželosečky k , kde $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$,

$$k: ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Postupným dosazením souřadnic zadaných bodů do obecné rovnice kuželosečky získáme následující soustavu homogenních lineárních rovnic.

$$16a + 16b + 16c + 4d + 4e + f = 0,$$

$$4a - 8b + 16c - 2d + 4e + f = 0,$$

$$4a + 4b + 4c + 2d + 2e + f = 0,$$

$$16a - 8b + 4c + 4d - 2e + f = 0,$$

$$16a - 4d + f = 0.$$

Tato soustava má řešení ve tvaru $a = -\frac{7t}{72}$, $b = \frac{t}{12}$, $c = \frac{5t}{36}$, $d = -\frac{5t}{36}$, $e = -\frac{11t}{18}$, $f = t$, kde $t \in R$

je reálný parametr, který musí být nenulový. V případě, že by bylo $t = 0$, pak by nebyla splněna podmínka $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Hledaná rovnice má tvar

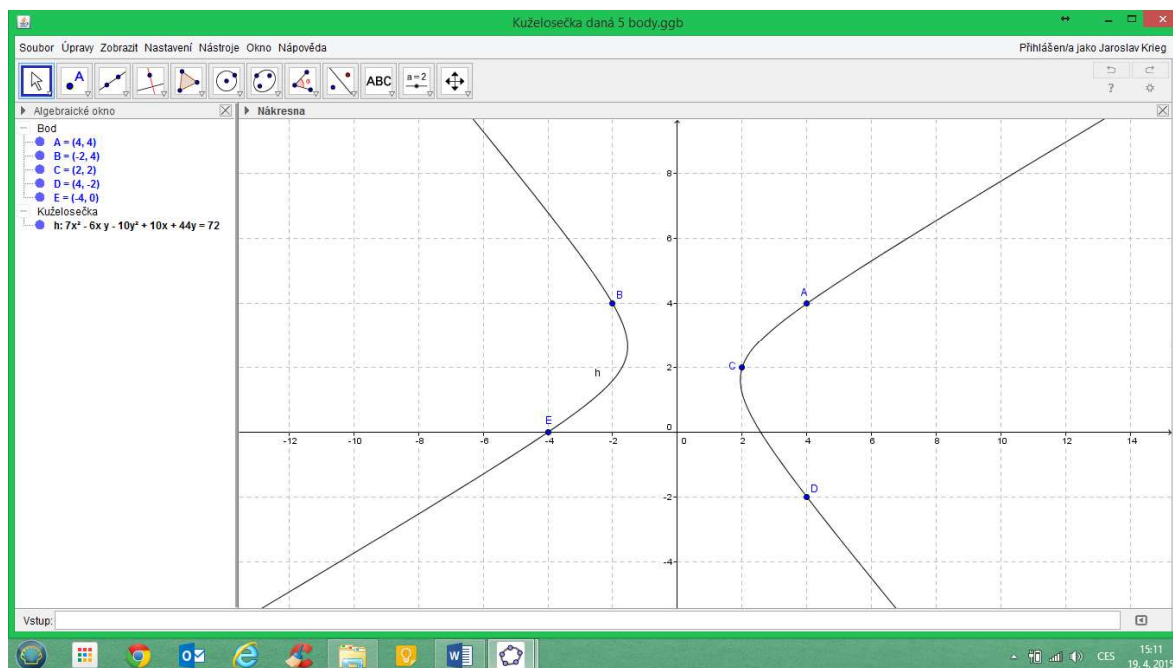
$$-\frac{7t}{72}x^2 + \frac{t}{12}xy + \frac{5t}{36}y^2 - \frac{5t}{36}x - \frac{11t}{18}y + t = 0, \text{ tj.}$$

$$7x^2 - 6xy - 10y^2 + 10x + 44y - 72 = 0.$$

Pomocí Geogebra snadno demonstrujeme oba přístupy:

a) Zadáme-li v rovině pět různých bodů, pak pomocí příkazu „**kuželosečka daná pěti body**“ proloží Geogebra těmito body kuželosečku. Protože zadané body jsou volné body roviny, tj. můžeme jimi libovolně v nákrese pohybovat, lze tedy vhodně přemístit tyto body tak, že leží například na hyperbole (viz níže uvedený příklad). Současně Geogebra vypíše rovnici kuželosečky, která těmito body prochází. V našem příkladu je hledanou rovnicí

$$7x^2 - 6xy - 10y^2 + 10x + 44y - 72 = 0.$$



Obr. 2 – Hyperbola zadaná pěti různými body (GeoGebra)

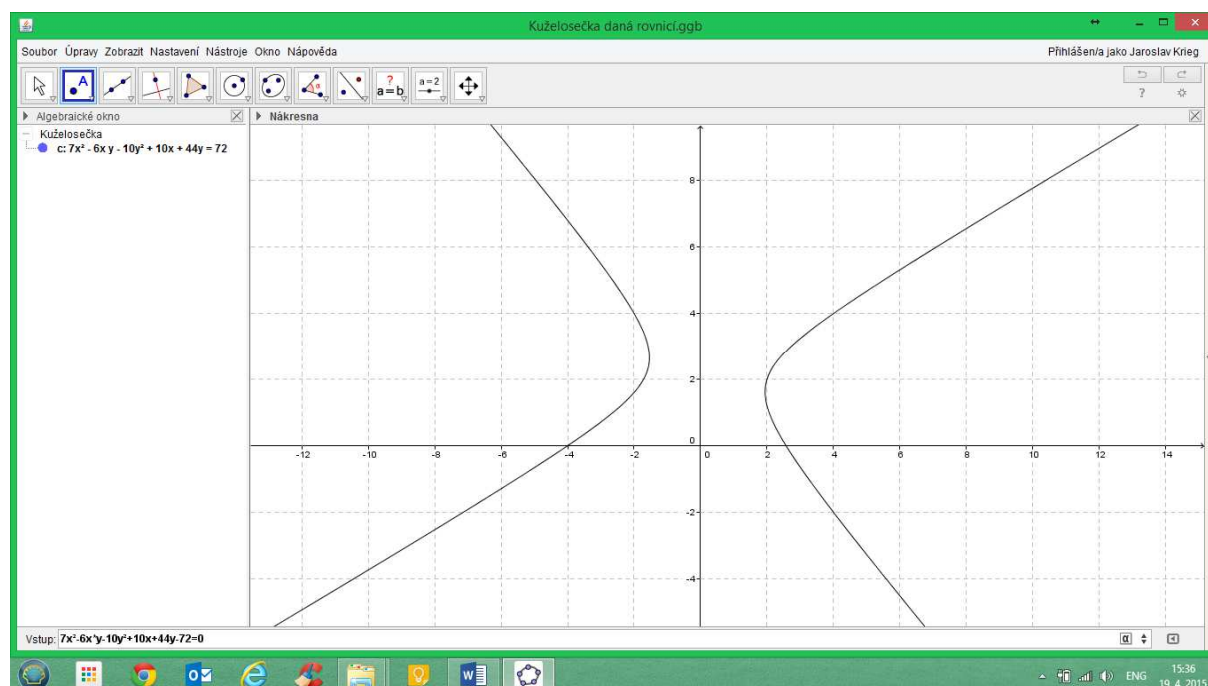
b) Zadáme-li do vstupního pole rovnici hyperboly

$$7x^2 - 6xy - 10y^2 + 10x + 44y - 72 = 0,$$

pak Geogebra narýsuje hyperbolu splňující uvedenou rovnici. Můžeme rovněž snadno ověřit, že body

$$A = [4, 4], B = [-2, 4], C = [2, 2], D = [4, -2], E = [-4, 0]$$

leží na této hyperbole.



Obr. 3 – Hyperbola zadaná rovnicí (GeoGebra)

4 Řezy na rotační kuželové ploše (geometrický přístup)

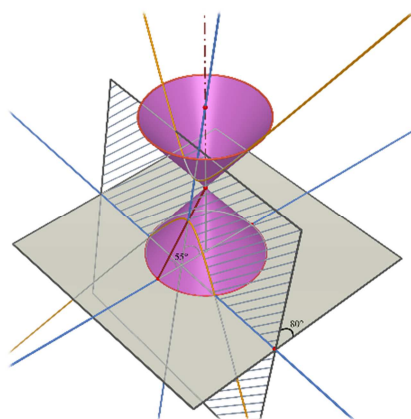
Křivky zvané kuželosečky lze získat jako řezy na kuželové ploše. Řezem rotační kuželové plochy rovinou, která neprochází vrcholem kuželové plochy, dostaneme právě jen elipsu, hyperbolu nebo parabolu. Typ kuželosečky, který obdržíme, je závislý na tom, pod jakým úhlem protíná rovina řezu kuželovou plochu.

Označme α úhel, který svírají povrchové přímky rotační kuželové plochy s rovinou kolmou k ose rotace. Označme dále β úhel, který svírá rovina řezu s rovinou kolmou k ose rotační kuželové plochy.

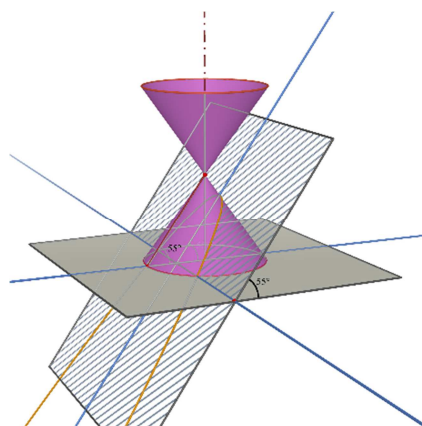
Potom mohou nastat tyto tři případy:

- a) $\alpha < \beta$, řezem je **hyperbola**,
- b) $\alpha = \beta$, řezem je **parabola**,
- c) $\alpha > \beta$, řezem je **elipsa** (pro $\beta = 0$ dostaneme **kružnici** jako speciální případ elipsy)

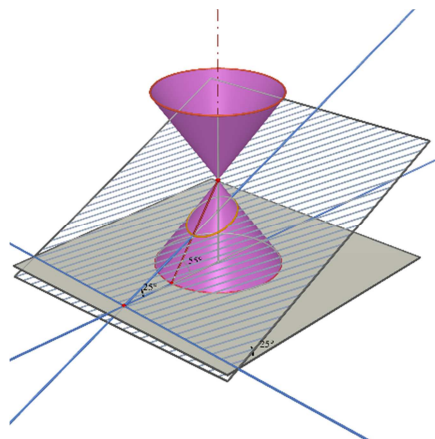
Následující obrázky 4 – 6 ukazují prostorové situace v případech a) – c). Pro vytvoření těchto obrázků jsem použil software Cabri 3D.



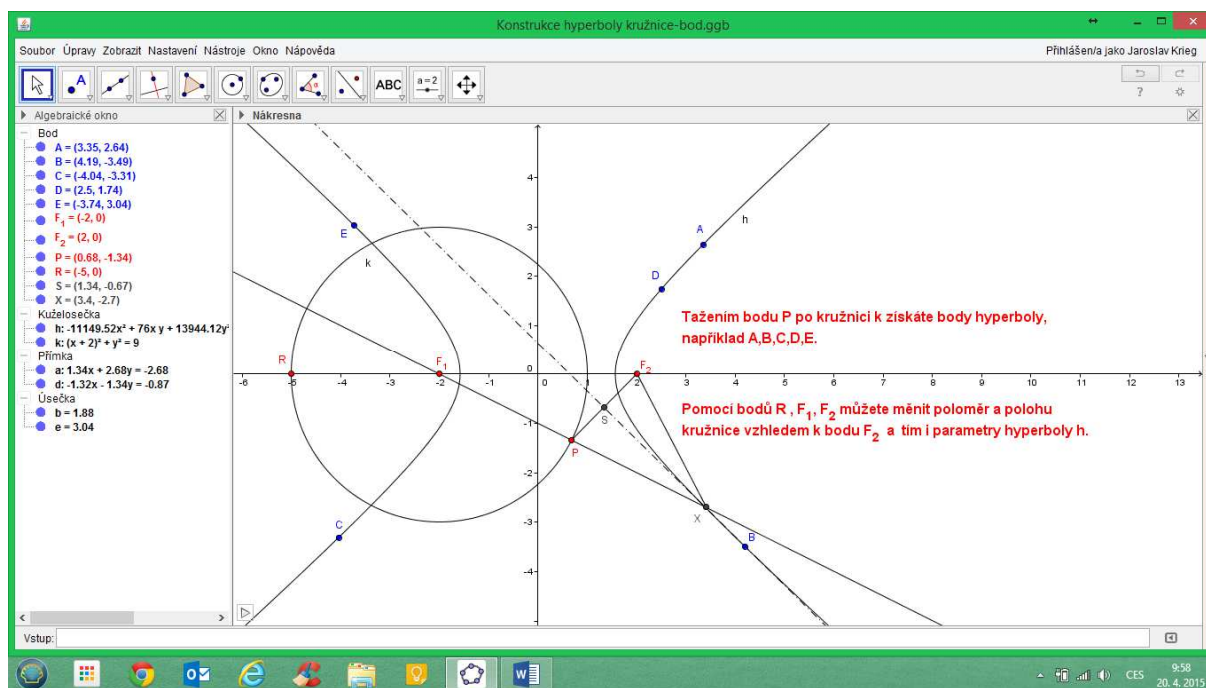
Obr. 4 – Hyperbola, $\alpha = 55^\circ$, $\beta = 80^\circ$ (Cabri 3D)



Obr. 5 – Parabola, $\alpha = 55^\circ$, $\beta = 55^\circ$ (Cabri 3D)

Obr. 6 – Elipsa, $\alpha = 55^\circ$, $\beta = 25^\circ$ (Cabri 3D)

5 Konstrukce hyperboly jako množiny bodů, které mají stejnou vzdálenost od dané kružnice a jejího vnějšího bodu



Obr. 7 – Konstrukce hyperboly pomocí dané kružnice a jejího vnějšího bodu (5)

Nyní dokážeme, že hledaným geometrickým místem bodů je skutečně hyperbola.

5.1 Tvzení

Geometrickým místem bodů (místem bodů dané vlastnosti), které mají stejnou vzdálenost od dané kružnice $k(F_1; |F_1R|)$ a jejího vnějšího bodu F_2 je hyperbola.

Důkaz

- 1) Na kružnici k zvolíme libovolný bod P , tj. $P \in k(F_1; |F_1R|)$.
- 2) Vytvoříme úsečku PF_2 .
- 3) Sestrojíme o osu úsečky PF_2 , kde bod $\{S\} = o \cap PF_2$.

4) Vytvoříme bod X , pro který platí, že je průsečíkem přímky F_1P a osy o , tj. $\{X\} = F_1P \cap o$.

Protože trojúhelník $\triangle PF_2X$ je rovnoramenný, neboť $|PX| = |F_2X|$, pak absolutní hodnota rozdílu vzdáleností bodu X od dvou pevně zadaných bodů F_1, F_2 je rovna poloměru zadané kružnice, tj. $\|XF_1\| - \|XF_2\| = \|XF_1\| - \|XP\| = \|F_1P\| = konst.$ Podle definice hyperboly z úvodu článku je bod X bodem hyperboly.

6 Konstrukce hyperboly jako množiny středů kružnic, které se dotýkají dvou kružnic, jejichž vzdálenost středů je větší než součet jejich poloměrů

Při řešení této úlohy jasně vynikne výhoda použití Geogebry, neboť stačí zkonstruovat pět bodů dané vlastnosti a jimi proložit hledanou kuželosečku, v tomto případě hyperbolu.

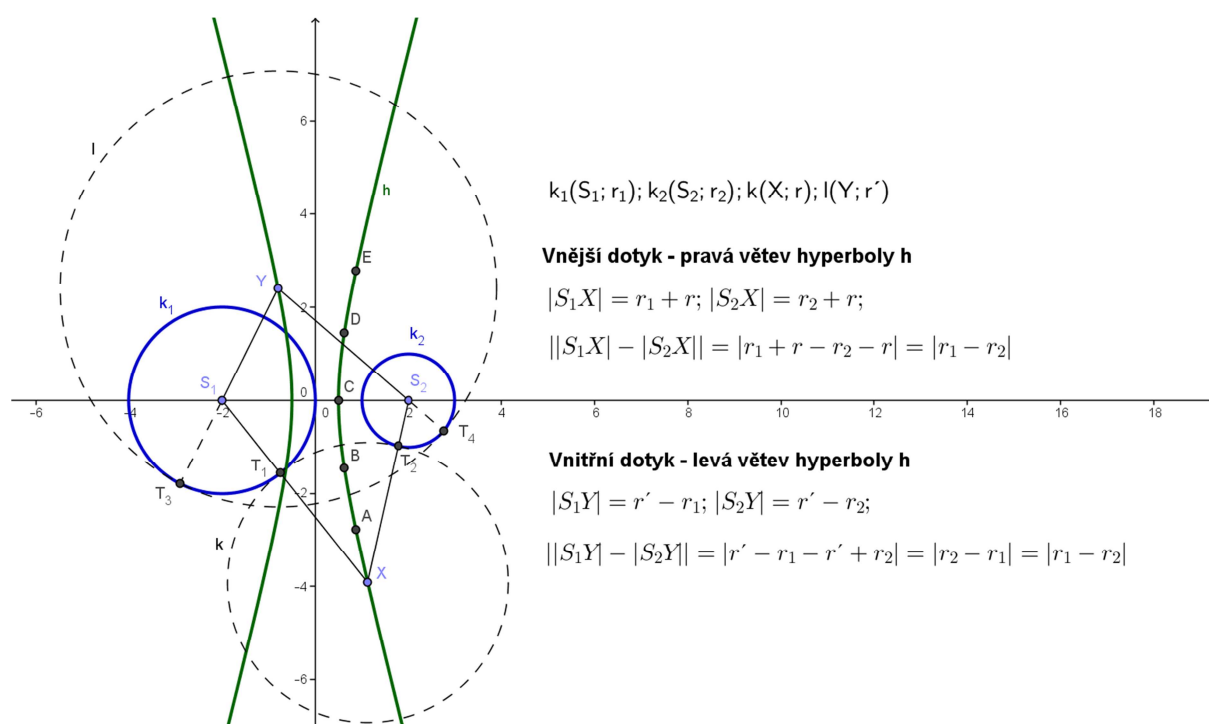
Někdy můžeme též využít středové a osově souměrnosti hyperboly, pokud známe střed nebo osu souměrnosti hyperboly.

Na obou následujících obrázcích jsou provedeny důkazy toho, že hledaným geometrickým místem bodů dané vlastnosti je hyperbola.

Všimněte si, že obrázek 8 popisuje stav, kdy hledaná kružnice se dotýká zadaných kružnic

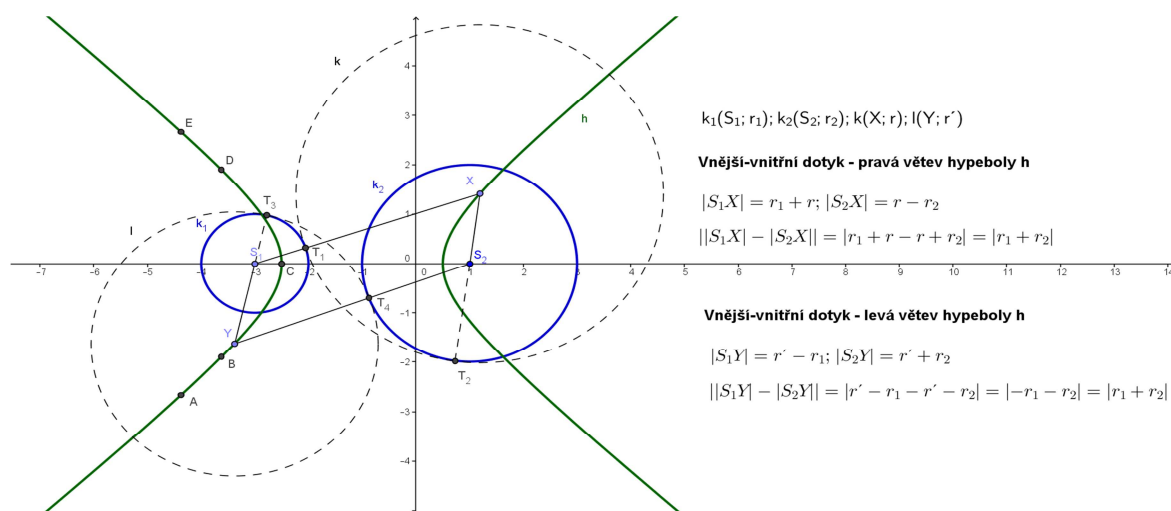
a) zvenku (vnější dotyk),

b) zevnitř (vnitřní dotyk).



Obr. 8 - Hyperbola jako množina středů kružnic, které se dotýkají dvou kružnic, jejichž vzdálenost středů je větší než součet jejich poloměrů (6)

Obrázek 9 popisuje kombinace vnějšího a vnitřního dotyku hledané kružnice k zadaným kružnicím.



Obr. 9 - Hyperbola jako množina středů kružnic, které se dotýkají dvou kružnic, jejichž vzdálenost středů je větší než součet jejich poloměrů (7)

Obě předešlé úlohy umožňují pomocí Geogebra a středoškolských znalostí geometrie vyřešit tzv. 10. Apolloniovu úlohu v nejobecnějším zadání, kde hledáme kružnici, dotýkající se tří zadaných kružnic (obecně 8 řešení).

Závěr

Článek je pomůckou pro konstrukci úloh, které vedou na použití hyperboly jako množiny bodů dané vlastností. Úlohy tohoto typu jsou bez použití vhodného software zdlouhavé, nepřesné, nepřehledné, a tím i obtížně řešitelné.

Geogebra je právě vhodným softwarem, který za nás vykoná tuto činnost a zpřístupní řadu konstrukcí, které jsou vhodné a snadno proveditelné i na střední škole.

Literatura

1. KOČANDRLE, M., BOČEK, L. *Matematika pro gymnázia: Analytická geometrie*. 2. upravené vyd. Praha: Prometheus, 2006. ISBN 80-7196-163-9.
2. PECH, P. *Kuželosečky*. 1. vyd. České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2004. ISBN 80-7040-755-7.
3. HOHENWARTER, M., HOHENWARTER, J. *Introduction to GeoGebra*. 141 s. [15.5.2015]. Dostupné z: <http://static.geogebra.org/book/intro-en.pdf>
4. *GeoGebra* [online]. International GeoGebra Institute. [15.5.2015]. Dostupné z: <http://tube.geogebra.org/student/m717771>
5. *GeoGebra* [online]. International GeoGebra Institute. [15.5.2015]. Dostupné z: <http://tube.geogebra.org/student/m1044329>
6. *GeoGebra* [online]. International GeoGebra Institute. [15.5.2015]. Dostupné z: <http://tube.geogebra.org/student/m1048877>
7. *GeoGebra* [online]. International GeoGebra Institute. [15.5.2015]. Dostupné z: <http://tube.geogebra.org/student/m1048927>

Kontaktní adresa:

Jaroslav Krieg, RNDr.,

Katedra přírodních věd, Vysoká škola technická a ekonomická v Českých Budějovicích, Okružní 517/10, 370 01 České Budějovice, tel.: +420 387 842 140, e-mail: krieg@vstecb.cz