

EFEKTÍVNY SPÔSOB VÝUČBY LINEÁRNEJ ALGEBRY POMOCOU MOTIVAČNÝCH PRÍKLADOV

GULDAN Vladimír – POBOČÍKOVÁ Ivana, SK

Resumé

V príspevku sa zaoberáme problematikou motivácie študentov bakalárskeho štúdia elektrotechniky a informačných technológií pri výučbe lineárnej algebry. Pri analýze obvodu striedavého prúdu sa používa lineárna algebra na výpočet prúdu a napätia v každom komponente. V príspevku ukážeme motivačný príklad, ako možno systém lineárnych rovníc použiť na analýzu elektrických obvodov pozostávajúcich z batérií a rezistorov. Aplikácia systémov lineárnych rovníc na analýzu elektrických obvodov sa ukázala ako veľmi užitočná, vďaka čomu je riešenie systémov jednoduchšie a efektívnejšie. Tým, že do zostavovania rovníc sa aktívne zapájajú aj študenti, je výučba oveľa zaujímavejšia a prínosná.

Kľúčové slová: motivácia, aplikovaná úloha, sústava lineárnych rovníc, elektrický obvod, elektrotechnika

AN EFFECTIVE WAY TO TEACH LINEAR ALGEBRA USING MOTIVATIONAL EXAMPLES

Abstract

This paper addresses the motivation of bachelor's degree students in electrical engineering and information technology when learning linear algebra. AC circuit analysis uses linear algebra to determine the current and voltage in each component. We present a motivating example that demonstrates how a system of linear equations can be applied to analyze electric circuits consisting of batteries and resistors. The application of linear equations to electrical circuit analysis proves highly useful, streamlining the problem-solving process. Additionally, involving students in the formulation of these equations enhances the engagement and educational value of the lessons.

Key words: motivation, applied problem, system of linear equations, electric circuit, electrical engineering

1 Úvod

V príspevku sa zaoberáme problematikou motivácie študentov bakalárskeho štúdia Fakulty elektrotechniky a informačných technológií ŽU v Žiline pri výučbe lineárnej algebry. Lineárna algebra sa vyučuje v rámci predmetu Matematika 1, ktorý je zaradený do zimného semestra v 1 ročníku bakalárskeho štúdia. Rozsah predmetu je 4 hodiny prednášok a 4 hodiny cvičení za týždeň.

Náplň predmetu Matematika 1 tvoria Lineárna algebra a Základy diferenciálneho a integrálneho počtu funkcie jednej premennej. Lineárnej algebre je venovaných prvých 6 týždňov semestra. Cieľom predmetu je oboznámiť študentov so základnými teoretickými pojmami z oblasti lineárnej algebry. Prednášky a následné cvičenia prebiehajú podľa nasledujúcej osnovy:

- Polynómy. Algebrické rovnice.
- Vektory – lineárna kombinácia, lineárna závislosť a nezávislosť, báza.
- Matice, základné operácie, druhy matic, hodnosť matice, inverzná matica.
- Determinanty, ich základné vlastnosti. Výpočet determinantov.
- Sústavy lineárnych rovníc. Cramerovo pravidlo. Gaussova eliminačná metóda.
- Vlastné čísla a vlastné vektory matice.
- Základy vektorovej algebry.

Po absolvovaní predmetu Matematika 1 by mali byť študenti schopní bežne používať a vhodne aplikovať vo svojom ďalšom štúdiu a profilácii pojmy dôležité pre aplikáciu lineárnej algebry v rôznych oblastiach elektrotechniky, informatiky a kybernetiky. Študenti zároveň získajú rutinné výpočtové zručnosti, ktoré sú dôležité pri počítaní s maticami, vektormi a sústavami lineárnych rovníc.

Na vysokej škole technického zamerania je dôležité hľadať prepojenia medzi matematikou a odbornými predmetmi. Avšak vzhľadom na nevyhovujúcu úroveň vedomostí z matematiky zo strednej školy, nedostatočné návyky študovať samostatne a pravidelne, mávajú študenti s matematikou problémy. Načo mi to bude? Kde toto v praxi použijem?- to sú otázky, s ktorými sa pravidelne stretávame, pretože študenti nevedia nájsť prepojenie teórie a praktického použitia preberanej problematiky. Snažíme sa preto študentom vysvetliť, že matematika je veda, ktorá má dôležitú úlohu v každodennom živote, a aké má prepojenie na odborné technické predmety. Nie je to teda len teória, vzorce, ktoré sa treba naučiť, ale že pomocou matematiky sa dajú riešiť praktické problémy. Významným prvkom motivácie štúdia matematiky sú aplikované úlohy (Országová, 2005). Vždy, keď to obmedzená časová dotácia dovolí, snažíme sa do výučby zaradiť motivačné príklady. Samozrejme, v mnohých prípadoch sú tieto príklady značne zjednodušené. Ale často stačí pri preberanej problematike spomenúť, kde a na čo v ďalšom štúdiu a profilácii sa používa preberaný pojem. Je zrejmé, že k tomu treba základnú orientáciu učiteľa matematiky vo vzťahoch medzi predmetmi a spoluprácu s učiteľmi na odborných katedrách (Vagaská, 2021). Naša pedagogická prax ukázala, že študenti chcú poznať konkrétne aplikácie matematických metód, ktoré práve študujú, a ak sú dostatočne vnútorne motivovaní, sú aj priaznivo naklonení k štúdiu. Mnohé riešené problémy si totižto študenti dokážu predstaviť, alebo sa s nimi už stretli. Je dôležité, aby študenti zistili, že riešiť problém znamená

- mať zvládnutý matematický aparát, ktorý tieto problémy popisuje,
- orientovať sa v matematických metódach,
- vedieť získané poznatky využiť pri riešení problému.

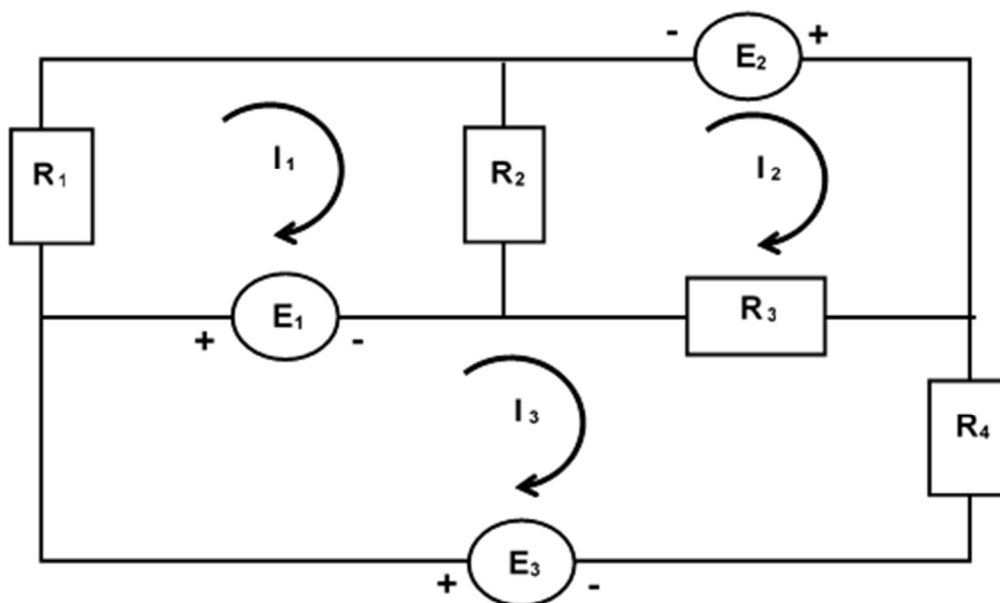
V rôznych oblastiach elektrotechniky, informatiky a kybernetiky zohráva lineárna algebra dôležitú úlohu. Používa sa pri analýze elektrických obvodov (Taing, 2001; Lay et al., 2006), riadiacich systémov, pri spracovaní audio a video signálov. V komunikačných systémoch sa lineárna algebra používa na navrhovanie a optimalizáciu algoritmov digitálneho spracovania

signálu. Lineárna algebra je rozhodujúca pri vývoji špičkových technológií, ako je robotika, strojové učenie a umelá inteligencia, kde sa vo veľkej miere spoliehajú na koncepty lineárnej algebry, ako je násobenie matic a vlastné vektory, čo z nich robí základnú zručnosť pre každého, kto chce pracovať v týchto oblastiach [5].

V príspevku sa zaoberáme problematikou motivácie študentov pri výučbe lineárnej algebry. Lineárna algebra sa používa pri analýze elektrických obvodov na riešenie systémov lineárnych rovníc. To pomáha budúcim inžinierom pochopiť, ako budú rôzne komponenty v obvode vzájomne pôsobiť a ako sa budú správať za rôznych podmienok. Napríklad pri analýze obvodu striedavého prúdu sa používa lineárna algebra na výpočet prúdu a napätia v každom komponente. Aplikácia systémov lineárnych rovníc na analýzu elektrických obvodov sa ukázala ako veľmi užitočná, vďaka čomu je riešenie systémov jednoduchšie a efektívnejšie. Tým, že do zostavovania rovníc sa aktívne zapájajú aj študenti, je výučba oveľa zaujímavejšia a prínosná. V príspevku ukážeme motivačný príklad, ako možno systém lineárnych rovníc použiť na analýzu elektrických obvodov pozostávajúcich z batérií a rezistorov.

2 Motivačný príklad

Uvažujme elektrický obvod znázornený na Obrázku 1. Obvod pozostáva zo 4 odporov a 3 zdrojov napätia. Konkrétne sú hodnoty odporov rovné $R_1 = 2 \Omega$, $R_2 = 3 \Omega$, $R_3 = 6 \Omega$, $R_4 = 4 \Omega$ a hodnoty napätí $E_1 = 5 V$, $E_2 = 4 V$ a $E_3 = 6 V$. Vypočítame hodnoty slučkových prúdov I_1 , I_2 a I_3 [1].



Obrázok 1.

Pri zostavovaní rovníc sa použije metóda slučkových prúdov. Dbáme na to, aby pri zostavovaní rovníc aktívne spolupracovali študenti. Je zrejmé, že znalosť základných fyzikálnych zákonov, ako je Ohmov zákon a Kirchhoffove zákony o prúde a napätí je pre nich samozrejímavá.

Vo všeobecnosti zostavíme sústavu lineárnych rovníc v maticovom tvare

$$\mathbf{RI} = \mathbf{U},$$

kde $\mathbf{R}$ je matica hodnôt odporov, teda v reči matematiky je to matica sústavy, $\mathbf{U}$ je vektor napätí pre obvod, teda pravá strana a $\mathbf{I}$ je vektor neznámych slučkových prúdov, teda vektor neznámych.

Na jednotlivé slučky aplikujeme Kirchhoffov zákon o napätí. Najskôr zapíšeme rovnice vo všeobecnom tvare. Pre jednotlivé slučky dostaneme nasledujúce rovnice:

- prvá slučka

$$R_1 I_1 + R_2 (I_1 - I_2) = E_1,$$

- druhá slučka

$$R_3 (I_2 - I_3) + R_2 (I_2 - I_1) = E_2,$$

- a nakoniec tretia slučka

$$R_3 (I_3 - I_2) + R_4 I_3 = E_3 - E_1.$$

Po úprave dostaneme pre slučkové prúdy I_1, I_2 a I_3 sústavu lineárnych rovníc v tvare

$$\begin{aligned} (R_1 + R_2)I_1 - R_2 I_2 &= E_1 \\ -R_2 I_1 + (R_2 + R_3)I_2 - R_3 I_3 &= E_2 \\ -R_3 I_2 + (R_3 + R_4)I_3 &= E_3 - E_1 \end{aligned}$$

Po dosadení konkrétnych hodnôt môžeme sústavu písať v tvare

$$\begin{aligned} 5I_1 - 3I_2 &= 5 \\ -3I_1 + 9I_2 - 6I_3 &= 4 \\ -6I_2 + 10I_3 &= 1 \end{aligned}$$

V maticovom zápise má sústava rovníc tvar

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -3 & 9 & -6 \\ 0 & -6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Výpočet slučkových prúdov je jednoduchou ilustráciou použitia sústavy lineárnych rovníc v elektrotechnike. Matica sústavy je v tomto prípade regulárna, takže na riešenie môžeme použiť

- Gaussovu eliminačnú metódu,
- Cramerovo pravidlo,
- Inverznú maticu.

Študentov upozorníme, že riešenie sústavy lineárnych rovníc Cramerovým pravidlom alebo pomocou inverznej matice je menej efektívne, lebo vzhľadom na výpočtovú náročnosť sú obe metódy zdĺhavé. Čím je väčší počet neznámych, tým je výpočet náročnejší na čas.

Sústavu ďalej riešime Gaussovou eliminačnou metódou (samotný výpočet neuvádzame). Po vyriešení dostaneme hodnoty jednotlivých slučkových prúdov

$$I_1 = \frac{34}{15} A, I_2 = \frac{19}{9} A \text{ a } I_3 = \frac{41}{30} A.$$

Na záver ešte uvedieme, že ak to priestor a čas na prednáške alebo cvičení dovoľí, využijeme príležitosť študentom povedať pár viet o inšpirujúcich osobnostiach vedy, matematiky a fyziky, s ktorými je preberaná problematika spojená. Bez nich by sme neboli tam, kde sme dnes. Ich intuícia, zanietenosť, práca a objavy prispeli k významnému pokroku a dodnes ich poznatky používame v každodennom živote. V tomto prípade spomíname jedného z najpozoruhodnejších a najlepších matematikov, ktorým bol Carl Friedrich Gauss (1777-1855), po ktorom je Gaussova eliminačná metóda pomenovaná. Jedným z Gaussových žiakov bol fyzik Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887), ktorý je autorom Kirchhoffových zákonov. Tieto zákony sú základnými vzťahmi pomocou ktorých sa riešia elektrické obvody. Z našej pedagogickej praxe môžeme potvrdiť, že poznámky o osobnostiach vedy, o ich živote a diele, oživia pedagogický proces, zvýšia pozornosť študentov a urobia výučbu zaujímavejšou.

3 Záver

V príspevku sme sa zaoberali problematikou motivácie študentov bakalárskeho štúdia elektrotechniky a informačných technológií pri výučbe lineárnej algebry. Ukázali sme jednoduchý motivačný príklad, ktorý možno použiť v lineárnej algebre pri riešení systému lineárnych rovníc. Aplikácia systémov lineárnych rovníc na analýzu elektrických obvodov pozostávajúcich z batérií a rezistorov sa ukázala ako veľmi užitočná, vďaka čomu je riešenie systémov jednoduchšie a efektívnejšie. Tým, že do zostavovania lineárnych rovníc sa aktívne zapájajú aj študenti, je výučba oveľa zaujímavejšia a pre študentov prínosná.

Literatúra

1. HELM Workbooks. [cit. 2024-06-25] Dostupné online z https://nucinkis-lab.cc.ic.ac.uk/HELM/helm_workbooks.html
2. HLADÍK, M. *Lineární algebra (nejen) pro informatiky*. MatfyzPress, 2019. ISBN 978-8-073-78392-1
3. LAY, D., LAY, S. R., McDONALD, J. J. *Linear Algebra and its Applications*. New York: Pearson/Addison-Wesley, Fifth edition. 2006. ISBN 978-0-321-98238-4
4. ORSZÁGHOVÁ, D. *Aplikované úlohy ako podpora medzipredmetových vzťahov matematika – fyzika*. In: Zborník z medzinárodnej vedeckej konferencie "Research and Teaching of Physics in the Context of University Education 2005". Nitra: SPU, 2005, s. 154 – 157. ISBN 80-8069-528-8
5. [cit. 2024-06-25] <https://www.studyforfe.com/blog/linear-algebra/>
6. TAING, S. Application of Linear Algebra, 2001. [cit. 2024-06-25] Dostupné online z <https://sites.math.washington.edu/~king/coursedir/m308a01/Projects/m308a01-pdf/taing.pdf>

7. VAGASKÁ, A. *The effective teaching of applied mathematics at technical universities–ICT-supported education*. In: INTED2021 Proceedings. IATED, 2021. p. 4660-4667. ISBN: 978-84-09-27666-0

Poznámka

Túto prácu podporila Slovenská grantová agentúra KEGA prostredníctvom projektu č. 029ŽU-4/2022 Implementácia princípov blended learning do výučby predmetu Numerické metódy a štatistika a projektu 025ŽU-4/2024 Implementácia nových didaktických prostriedkov na zvýšenie kvality výučby matematiky v inžinierskom stupni na technických univerzitách.

Kontaktná adresa:

RNDr. Vladimír Guldan
Katedra aplikovanej matematiky
Strojnícka fakulta, Žilinská univerzita v Žiline
Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina, Slovensko
email: vladimir.guldan@fstroj.uniza.sk

Mgr. Ivana Pobočíková, PhD.
Katedra aplikovanej matematiky
Strojnícka fakulta, Žilinská univerzita v Žiline
Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina, Slovensko
email: ivana.pobocikova@fstroj.uniza.sk