

RIEŠENIE PREVODOVÝCH FUNKCIÍ V KINEMATIKE

LABAŠOVÁ Eva, SR

Resumé

Riešenie problémov mechaniky a dynamiky strojov si vyžaduje riešenie rozsiahlejších sústav rovníc, zložitých integrálov, derivácií a vytvorenie vzájomných grafických závislostí veličín. Vzhľadom na časovú náročnosť ucelené analytické alebo numerické riešenie úloh riešia študenti formou samostatnej práce mimo vyučovania. Uplatnením výpočtovej techniky a matematických programov možno niektoré úlohy ukončiť priamo vo vyučovacom procese. Príspevok sa zaoberá aplikáciou programu Mathematica pri riešení prevodových funkcií v mechanizmoch v rámci predmetu Mechanika tuhých telies.

Kľúčové slová: zdvihová závislosť, prevodová funkcia, mechanizmus

SOLUTION OF TRANSMISSION FUNCTIONS IN KINEMATICS

Abstract

Computational problems of mechanics and dynamics of machines require to solve larger equations system, complex integrals, derivations and generation of graphical interdependency of parameters. Due to large time required to compute the integrated analytical or numerical solution tasks their solution is provided by students on self-access base at home. Application of computers and of proper mathematical codes it is possible to complete the solution of certain tasks within the teaching process. Utilization of computer algebra system Mathematica within the subject of solid mechanics to solve the transmission functions in mechanisms is described in the presented paper.

Key words: upstroke dependence, transmission function, mechanism

1 Úvod

Na technických univerzitách v prvých ročníkoch bývajú zaradené všeobecné odborné predmety ako napr. Statika, Kinematika, Dynamika, Pružnosť, Pevnosť a pod. Na tieto potom vo vyšších ročníkoch nadväzujú predmety podľa príslušných odborov. Na našej fakulte na predmet Mechanika tuhých telies nadväzuje napr. Aplikovaná mechanika, Mechanika výrobných strojov, Diagnostika výrobných strojov a pod. Cieľom príspevku je poukázať na možnosť aplikácie programu Mathematica pri riešení niektorých problémov mechaniky. Príspevok samozrejme nemôže obsahovať veľmi rozsiahlu problematiku aplikácie programu na mechanické a mechatronické problémy [1]. Je v ňom stručná ukážka jeho aplikácie pri určení grafických výstupov kinematických veličín mechanizmu a vyjadrenia prevodových funkcií.

Mathematica patrí do skupiny programov "Computer Algebra Systems", ktorý je určený na uľahčenie aplikácií matematiky. Umožňuje numerické aj symbolické výpočty vo všetkých oblastiach od elementárnej algebry cez maticový počet až k diferenciálnemu a integrálnemu počtu. Zahrňuje množstvo funkcií a algoritmov z oblasti všeobecnej algebry, kombinatoriky, maticového a tenzometrického počtu, štatistiky, regresnej analýzy [2].

2 Prevodové funkcie mechanizmu

Prenos pohybu patrí medzi najdôležitejšie požiadavky pri všetkých mechanických zariadeniach. Pre dosiahnutie príslušných parametrov je potrebné realizovať prenos pohybu pomocou prevodového systému.

V technologických strojoch a zariadeniach sa nachádzajú prevody, ktorých podstatou sú rôzne druhy mechanizmov. V daných mechanizmoch väčšinou hnací člen koná rotačný pohyb a hnaný člen koná rotačný alebo posuvný pohyb. V mnohých prípadoch sú to deje periodické. Prevodová funkcia (zdvihová závislosť λ) medzi polohou vstupného a výstupného člena prevodového mechanizmu je daná závislosťou

$$q_o = \lambda[q_i(t)], \quad (1)$$

kde q_o je poloha výstupného člena a q_i je poloha vstupného člena.

Rýchlosť výstupného člena $\dot{q}_o$ možno určiť zo vzťahu [3]:

$$\dot{q}_o = \frac{d q_o}{d t} = \frac{d \lambda[q_i(t)]}{d t} = \frac{d \lambda[q_i(t)]}{d q_i} \frac{d q_i}{d t} = \frac{d \lambda[q_i(t)]}{d q_i} \dot{q}_i = \mu[q_i(t)] \dot{q}_i, \quad (2)$$

$$\text{kde } \mu[q_i(t)] = \frac{d \lambda[q_i(t)]}{d q_i} \text{ je prevod medzi vstupným a výstupným členom.} \quad (3)$$

Zrýchlenie výstupného člena $\ddot{q}_o$ je dané:

$$\ddot{q}_o = \frac{d \dot{q}_o}{d t} = \frac{d}{d t} \{ \mu[q_i(t)] \dot{q}_i \} = \frac{d \mu[q_i(t)]}{d q_i} \dot{q}_i^2 + \mu[q_i(t)] \ddot{q}_i = \nu[q_i(t)] \dot{q}_i^2 + \mu[q_i(t)] \ddot{q}_i, \quad (4)$$

$$\text{kde } \nu[q_i(t)] = \frac{d \mu[q_i(t)]}{d q_i} = \frac{d^2 \lambda[q_i(t)]}{d q_i^2} \text{ je derivácia prevodu.} \quad (5)$$

Zdvižová závislosť (λ), prevod (μ) a derivácia prevodu (ν) predstavujú bezrozmerné veličiny a nazývame ich prevodové funkcie mechanizmu. Ak poznáme tieto prevodové funkcie a vstupnú kinematickú veličinu hnacieho člena vieme určiť výstupné kinematické veličiny hnaného člena. Vo všeobecnosti môžu nastať štyri prípady transformácie pohybu (uvažujeme mechanizmus s n členmi, člen ① tvorí základný nepohyblivý rám):

1) vstupný (hnací) člen koná rotačný pohyb ($\varphi_{21}, \omega_{21}, \varepsilon_{21}$) a výstupný (hnaný) člen koná tiež rotačný pohyb (φ_{n1}) jeho kinematické veličiny (rýchlosť ω_{n1} , zrýchlenie ε_{n1}) sú:

$$\varphi_{n1} = \lambda[\varphi_{21}(t)], \quad \omega_{n1} = \mu \omega_{21}, \quad \varepsilon_{n1} = \nu \omega_{21}^2 + \mu \varepsilon_{21}, \quad (6)$$

2) vstupný člen koná rotačný pohyb ($\varphi_{21}, \omega_{21}, \varepsilon_{21}$) a výstupný člen koná translačný pohyb (y_{n1}) jeho kinematické veličiny (rýchlosť v_{n1} , zrýchlenie a_{n1}) sú:

$$y_{n1} = r_p \lambda[\varphi_{21}(t)], \quad v_{n1} = r_p \mu \omega_{21}, \quad a_{n1} = r_p (\nu \omega_{21}^2 + \mu \varepsilon_{21}), \quad (7)$$

kde r_p [m] je konštanta prevodu,

3) vstupný člen koná translačný pohyb (y_{21}, v_{21}, a_{21}) a výstupný člen koná tiež translačný pohyb (y_{n1}) jeho kinematické veličiny (rýchlosť v_{n1} , zrýchlenie a_{n1}) sú:

$$y_{n1} = \lambda[y_{21}(t)], \quad v_{n1} = \mu v_{21}, \quad a_{n1} = \nu v_{21}^2 + \mu a_{21}, \quad (8)$$

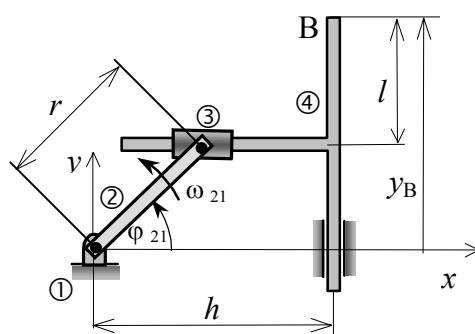
4) vstupný člen koná translačný pohyb (y_{21}, v_{21}, a_{21}) a výstupný člen koná rotačný pohyb (φ_{n1}) jeho kinematické veličiny (rýchlosť ω_{n1} , zrýchlenie ε_{n1}) sú:

$$\varphi_{n1} = \frac{1}{r_p} \lambda[y_{21}(t)], \quad \omega_{n1} = \frac{1}{r_p} \mu v_{21}, \quad \varepsilon_{n1} = \frac{1}{r_p} (\nu v_{21}^2 + \mu a_{21}). \quad (9)$$

3 Určenie kinematických veličín mechanizmu

V rámci výpočtových cvičení v predmete Mechanika tuhých telies študenti bežne riešia kinematické veličiny rôznych mechanizmov. V nasledovnom príklade sú určené kinematické veličiny na konkrétnom zvolenom príklade.

Na obr.1 je zakreslená schéma jednoduchého mechanizmu. Daný je rotačný pohyb kľuky ② (hnací člen) veľkosťou uhlovej rýchlosti $\omega_{21} = 2 \text{ rad.s}^{-1}$. Pre stanovenie prevodu medzi členmi ④ (hnaný člen), ② určíme najskôr časovú závislosť polohy bodu B zdvíhadla ④ v zvolenom súradnicovom systéme:



Obr. 1

$$x_B = h = \text{konšt.}, \quad (10)$$

$$y_B = r \sin \varphi_{21} + l, \text{ kde } \varphi_{21} = \omega_{21} t. \quad (11)$$

Študenti v rámci cvičení sú schopní tieto rovnice zostrojiť a taktiež previesť derivácie pre určenie veľkosti rýchlosti a zrýchlenia bodu B zdvíhadla. Pomocou programu Mathematica v rámci cvičení, poprípade v rámci samostanej práce mimo vyučovania, by si študenti mohli vykonať kontrolu derivácií daných funkcií, ale aj dospieť ku grafickým závislostiam kinematických veličín (obr.2).

Úloha je riešená pre geometrické hodnoty:

$$r = 0,6 \text{ m}; l = 0,4 \text{ m}; h = 0,8 \text{ m}$$

Zápis zadania (Mathematica):

zadanie uhlovej rýchlosti..... $\omega=2$

zadanie polohy..... $y[t_]:=r*\text{Sin}[\omega*t]+l$

určenie rýchlosti..... $vy[t_]=D[y[t],t]$

určenie zrýchlenia..... $ay[t_]=D[vy[t],t]$

Výpis výsledkov - analyticky:

veľkosť rýchlosti: $v_{41} = 2 r \text{ Cos}[2t]$

veľkosť zrýchlenia: $a_{41} = -4 r \text{ Sin}[2t]$

Vo vytvorenom algoritme v „Mathematica“, stačí teraz zmeniť len veľkosť uhlovej rýchlosti a získame derivácie (veľkosť rýchlosti a zrýchlenia) a taktiež grafické závislosti pre rýchlosť, či zrýchlenie (obr. 3). Je možné zmeniť tiež veľkosti ostatných vstupných parametrov pre zvolený mechanizmus.

výpis zo súboru

$\omega=4$

$y[t_]:=r*\text{Sin}[\omega*t]+l$

1

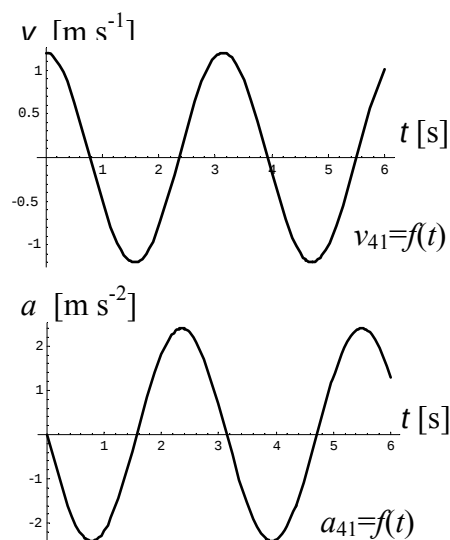
$vy[t_]=D[y[t],t]$

$ay[t_]=D[vy[t],t]$

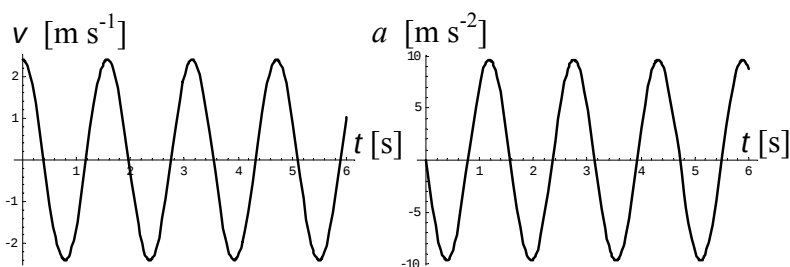
4

$4 r \text{ Cos}[4 t]$

$-16 r \text{ Sin}[4 t]$



Obr. 2



Obr. 3

4 Určenie prevodových funkcií daného mechanizmu

Mechanizmus transformuje rotačný pohyb (hnací člen) na vratný posuvný pohyb (hnaný člen). Parametre rotačno-posuvného pohybu označme $\varphi = \varphi_{21}$, $y = y_{41}$.

Zdvihová závislosť λ je daná vzťahom:

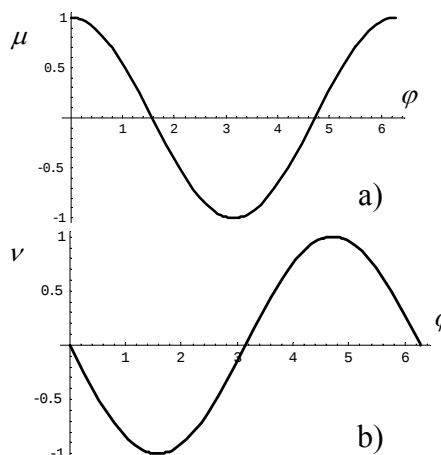
$$y = r \sin \varphi = r \lambda[\varphi], \quad \lambda = f(\varphi). \quad (12)$$

Prevod μ (obr. 4 a):

$$\mu = \frac{dy}{d\varphi} = \cos \varphi. \quad (13)$$

Derivácia prevodu ν (obr. 4 b):

$$\nu = \frac{d\mu}{d\varphi} = -\sin \varphi \quad (14)$$



Obr. 4

5 Záver

V príspevku je ukázaná aplikácia programu Mathematica vo výchovno-vzdelávacom procese v predmete Mechanika tuhých telies. Študenti v rámci tohto predmetu riešia zadania formou samostatnej práce mimo vyučovania. Pri riešení konkrétnych úloh tak aplikujú poznatky z matematiky v odborných technických predmetoch. Vytváranie grafov navyše pomáha študentom lepšie si uvedomiť funkčné závislosti medzi veličinami.

PodĎakovanie

Autorka vyjadruje poďakovanie KEGA MŠ SR za podporu projektu „Budovanie vedeckovýskumného a pedagogického centra Prevody a prenosy“ - KEGA 3/4154/06.

6 Literatúra

1. Mudrik J., Nad' M.: *Mechatronika v technologických zariadeniach a systémoch*. In: AT&P Journal Plus, No. 1, 2007, s. 330-333, ISSN 1336-5010.
2. Komorníková, M., Mikula, K.: *Výpočtový systém Mathematica*. 1.vyd. Bratislava. Vydavateľstvo STU, 1998, 198s., ISBN 80-227-1123-3.
3. Jančina, J., Pekárek, F.: *Mechanika II. Kinematika*. 1.vyd. Bratislava. Vydavateľstvo ALFA, 1987, 336 s.

Lektoroval: Jaroslava Trubenová, RNDr., PhD.

Kontaktná adresa:

Eva Labašová, Ing. PhD.,
Katedra aplikovanej mechaniky, ÚVSM,
Materiálovo-technologická fakulta STU v Trnave,
Pavlínska 16, 917 24 Trnava, SR,
tel. 0421 918646022,
e-mail eva.labasova@stuba.sk