

SÚSTAVY DIFERENCIÁLNÝCH ROVNÍC A SÚRADNICOVÉ SYSTÉMY

MACUROVÁ Anna, SR – MACURA Dušan, SR

Resumé

V príspevku sú uvedené niektoré súradnicové systémy, ktoré sa používajú pri vyšetrovaní vlastností riešení sústav diferenciálnych rovníc pomocou transformácie súradnicových systémov. Nelineárne diferenciálne sústavy sú často touto metódou vyšetrované ako kvázilineárne.

Kľúčové slová: Sústavy diferenciálnych rovníc, súradnicové systémy, transformácia sústav.

DIFFERENTIAL EQUATIONS SYSTEMS AND COORDINATE SYSTEMS

Abstract

The article introduces some coordinate systems important for transformation nonlinear differential equations system and investigated the properties of the solutions. The nonlinear differential equations systems are investigated as quasilinear differential equations systems.

Key words: Differential equations systems, coordinates systems, transformation systems.

1 Úvod

Transformácia sústavy diferenciálnych rovníc

Nech M , M' sú otvorené podmnožiny v R^n a nech funkcie $u_1, u_2, \dots, u_n : M \rightarrow R$ majú spojité derivácie prvého rádu a nech sprostredkujú zobrazenie množiny M na množinu M' , pre ktoré sú splnené podmienky [1]:

$$a) (u_1(x_1, x_2, \dots, x_n), u_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, u_n(x_1, x_2, \dots, x_n)) \in M'$$

$$\text{pre } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in M, \quad (1)$$

b) Pre každý bod $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in M'$ existuje práve jeden bod $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in M$ tak, že je $\xi_i = u_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pre $i = 1, 2, \dots, n$, (2)

$$c) \text{ Jakobiho determinant } \det \left(\frac{\partial u_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_j} \right) \neq 0, \text{ pre } i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$$

v každom bode $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in M$.

2 c-hyperbolické súradnice

Transformácia sústav diferenciálnych rovníc vyjadrená funkciou Φ_{cH} definovaná v práci [4] nasledovne

$$\Phi_{cH} : (r(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_{n-2}(t), v(t)) \rightarrow (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \quad (3)$$

pomocou rovníc v tvare

$$\begin{aligned} x_1(t) &= r(t) \cosh u_1(t) \\ x_k(t) &= r(t) \left(\prod_{i=1}^{k-1} \sinh u_i(t) \right) \cosh u_k(t), \quad k = 2, 3, \dots, n-2 \end{aligned} \quad (4)$$

⋮

$$x_{n-1}(t) = r(t) \left(\prod_{i=1}^{n-2} \sinh u_i(t) \right)$$

$$x_n(t) = r(t) v(t),$$

kde sú funkcie $u_i(t), r(t), v(t) \in C_1(\langle t_0, \infty \rangle, R)$, $i = 1, 2, \dots, n-2$ spojité a pre funkcie v rovniciach (4) platí: $r(t) > 0$, $v(t) > 0$, $u_i(t) \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n-2$ vyjadruje zovšeobecnené c - hyperbolické súradnice. Sú použité pri vyjadrení asymptotických vlastností riešení nelineárnej sústavy diferenciálnych rovníc v článku [3].

$J_{\Phi_{cH}}^n$ **Jakobián transformácie** Φ_{cH}

Regulárnosť uvedeného zobrazenia potvrdzuje $J_{\Phi_{cH}}^n$, Jakobián transformácie Φ_{cH} .

Nech Φ_{cH} je transformácia pomocou zovšeobecnených c - hyperbolických súradníc (4), kde $r(t) > 0$, $u_i(t) \neq 0$,
 $u_i(t), r(t), v(t) \in C_1(\langle t_0, \infty \rangle, R)$, $i = 1, 2, \dots, n-2$, $t \in \langle t_0, \infty \rangle$, potom Jakobián transformácie Φ_{cH} je

$$J_{\Phi_{cH}}^n = r^{n-1} \prod_{i=1}^{n-3} \sinh^{n-2-i}(u_i).$$

Dôkaz je uvedený v článku [4].

3 c-hyperbolické súradnice

Ak $D_0 \subset D$ je otvorená neprázdna množina a derivácie, $\partial g_i(t, x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)) / \partial x_j$, sú spojitými funkciami v oblasti D pre všetky $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, potom každým bodom $(t_0, x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0) \in D$ prechádza práve jedna integrálna krivka $x \in D$ systému (6) [5], [6]. Nech $X_n^P(x_1^n, x_2^n, x_3^n, x_4^n) \in R^4$ je ľubovoľný bod krivky x^p súhlasne orientovanej s integrálnou krivkou $x \in D$ systému (6). Je zrejmé, že k tomuto bodu možno nájsť takú hodnotu $u_n = u(t_n)$ orientovaného uhla a vzdialenosť $r_n = r(t_n)$ tak, že platí

$$\begin{aligned} x_1(t) &= r(t) \cos u_1(t), \\ x_2(t) &= r(t) \sin u_1(t) \cos u_2(t), \\ x_3(t) &= r(t) \sin u_1(t) \sin u_2(t) \end{aligned} \quad (5)$$

$x_4(t) = r(t)v(t)$,
 $r(t), u_1(t), u_2(t), v(t) \in C_1(J, R)$, kde $C_1(J, R)$ je priestor derivovateľných reálnych funkcií jednej reálnej premennej t definovaných na intervale J .

Jakobiho determinant J zobrazenia (14) je $r^3(t)\sin u_1(t)$,

$t \in J_1, \sin u_1(t) > 0, J_1 \subset J_0, J_1 = (0, \pi)$, zobrazenie (5) je regulárnym zobrazením.

Dôkaz tvrdenia je možné nájsť v prácach [5], [7].

Rovnice (5) voláme cylindrické súradnice. Vlastnosti riešení systému (6) sú pomocou týchto súradníc vyjadrené v článku [2]. Uvedieme príklad sústavy diferenciálnych rovníc, pre ktorú je vhodné pri vyšetrovaní jej riešenia použiť cylindrické súradnice.

Nech je daný nelineárny diferenciálny systém

$$x'(t) = (a(t, x(t))A_4 + b(t, x(t))E_4)x(t), \quad (6)$$

kde pre funkcie $a(t, x(t)), b(t, x(t))$ platí

$a(t, x(t)) \in C_0(D \equiv J \times R^4, R)$, $b(t, x(t)) \in C_0(D \equiv J \times R^4, R)$, $a(t, x(t)) \neq 0$, pre všetky $(t, x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)) \in D$ je A_4 konštantná matica v tvare

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

E_4 je jednotková matica, C_0 je priestor spojitých reálnych funkcií štyroch reálnych premenných $t, x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)$ definovaných na množine $J \times R^4$.

O každom riešení $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))$,

$x_1(t_0) = x_1^0, x_2(t_0) = x_2^0, x_3(t_0) = x_3^0, x_4(t_0) = x_4^0, t_0 \in J$ predpokladáme, že existuje na intervale J .

4 Polárne súradnice

Polárne súradnice patria k najjednoduchším súradniciam používaným pri transformácii sústav diferenciálnych rovníc predovšetkým vo fyzike a v mechanike.

Nech je daná sústava diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned} x_1' &= g_1(x_1, x_2) \\ x_2' &= g_2(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (7)$$

Nech ku každému netriviálnemu riešeniu $x(t), t \in J_0$ systému (10) existuje polárna funkcia $u_1(t) \geq 0$ a uhlová funkcia $u_2(t)$ taká, že $u_2(t) \in C_1(J, R)$, kde $C_1(J, R)$ je priestor derivovateľných reálnych funkcií jednej reálnej premennej t definovaných na intervale J . Pre riešenia sústavy (7) $x_i(t), t \in J_0, i = 1, 2$ platí

$$\begin{aligned} x_1(t) &= u_1(t) \cos u_2(t) \\ x_2(t) &= u_1(t) \sin u_2(t) \end{aligned} \quad (8)$$

5 Literatúra

1. KURZWEIL, J. *Obyčajné diferenciálne rovnice*. SNTL, Praha, 1978.
2. MACURA, D. – MACHALOVÁ, A. Ohraničenosť a oscilatoričnosť riešení systému štyroch nelineárnych diferenciálnych rovníc prvého rádu. *Acta Facultatis Paedagogicae Universitatis Šafarikanae*. FHPV PU, Prešov. 1996. pp. 25-30.
3. MACURA, D. – MACUROVÁ, A. On boundedness and oscilatoricity of solutions of non-linear differential systems. *Proceedings of the International Scientific Conference of Mathematics*, ŽU Žilina, 1998, ISBN 80-7100-578-9.
4. MACURA, D. – MACUROVÁ, A. On a Trasformation by Means of the Generalized c – Hyperbolic Coordinates. *Annals of DAAAM for 2004 & Proceedings of the 15th International DAAAM Symposium „ Intelligent Manufacturing & Automation*. 2004, Vienna, Austria, pp. 261-262.
5. MACUROVÁ, A. – MAMRILLA, D. A Remark on Transformation of Certain Nonlinear Differential Systems by Means of Hyperbolic Coordinates. *Procedings of the International Scientific Conference on Mathematics*. TU Košice, 2000, pp. 118-121.
6. MAMRILLA, D. *O systémoch kvázilineárnych diferenciálnych rovníc prvého rádu*. Essox Prešov, 2004, ISBN 80-968369-5-1.
7. MAMRILLA, D. Transformácia pomocou krivočiarych súradníc a niektoré vlastnosti riešení diferenciálnych systémov, riešenia systémov lineárnych diferenciálnych rovníc so symetrickou maticou. *Acta Facultatis Paedagogicae Universitatis Šafarikanae, XXV*, Prešov, UPJŠ, 1994, ISBN 80-88697-09-3.
8. MACURA, D. *Obyčajné diferenciálne rovnice*. 1. vyd. Prešov. FHPV PU, 2003. 79 strán. ISBN 80-8068-175-9.
9. MACURA, D. *Funkcia viac premenných* 1. vyd. Prešov.FHPV PU, 2005. 56 strán. ISBN 80-8068-321-2.
10. VASILKO, K. et all. *Technológia obrábania a montáže* 1. vyd. Bratislava. Alfa, 1991, 494 s.
11. HRUBINA, K.- MACUROVÁ, A. On the Approximation Method Applied to the Solution of Mathematical Model Expressed by Differential Equation of the Second Order. *Transaction of the Universities of Košice*, 2003, p. 36-46. ISSN 1335-2334.
12. MACUROVÁ, A. – VASILKO, K. Analysis of Linear and Non – Linear Equation for Oscillating Movement. *Optimizacija virobničich procesiv i tehničnij kontrol' u mašinobuduvanni ta priladobuduvanni*. Visnik nacional'noho universitetu L'vivska politehnika. No. 583 (2007), p. 96 – 102. ISSN 0321-0499.
13. MACUROVÁ, A. Aproximácia funkcií v experimentálnych metódach. *Forum statistikum slovakum*. Číslo 2/2007. Ročník III. s. 164-167. ISSN 1336-7420.
14. MACUROVÁ, A. - MACURA, D. Ohraničenosť riešení diferenciálnej rovnice druhého rádu. *Forum statistikum slovakum*. Číslo 2/2007. Ročník III. s. 168-171. ISSN 1336-7420.

Príspevok je zostavený v rámci riešenia projektu 1/4004/2007.

Lektoroval: Doc. RNDr. Anna Tirpáková, CSc.

Kontaktné adresy:

Anna Macurová, PaedDr. PhD.,
Katedra matematiky, informatiky a kybernetiky,
Fakulta výrobných technológií TU v Košiciach,
Bayerova 1, 080 01 Prešov, SR, tel. 00421
0905205933 e-mail anna.macurova@tuke.sk

Dušan Macura, Mgr. PhD.
Katedra matematiky, Fakulta humanitných a
prírodných vied, Prešovská univerzita, Prešov, 17.
Novembra, 080 01 Prešov, SR, e-mail
macura@unipo.sk