

RIEŠENIE DIFERENCIÁLNEJ ROVNICE FYZIKÁLNEJ ÚLOHY VYUŽITÍM MATLABU

FECHOVÁ Erika, SR

Resumé

V súčasnej dobe sa na školách stretávame so snahou učiteľov zavádzať a využívať informačno-komunikačné technológie vo vyučovacom procese technických predmetov ako sú matematika, fyzika, chémia. Okrem e-learningovej podpory (elektronické materiály a skriptá dostupné na internete) sú to rôzne matematické softwarové prostredia ako Matlab, Mathematica, MS Excel atď. Príspevok poukazuje na možnosť využitia prostredia MATLAB pri riešení diferenciálnej rovnice fyzikálnej úlohy.

Kľúčové slová: matematický model, fyzikálna úloha, diferenciálna rovnica, MATLAB

THE SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATION OF PHYSICAL PROBLEM BY THE USE OF MATLAB

Abstract

At the present time teachers try to introduce and use information technologies in educational process of technical subjects at schools as mathematics, physics, chemistry. Apart from e-learning support (electronic materials and textbooks available on the internet), there are various mathematical software environments as MATLAB, Mathematica, MS Excel etc. The paper points out the possibility of MATLAB utilization at solving differential equation of physical problem.

Key words: mathematical modelling, physical problem, differential equation, MATLAB

1 Úvod

Fyzikálna úloha poskytuje poznanie v rôznych formách - ako motivačný prostriedok, informáciu o skúmanom jave, ale aj ako súbor činností potrebných na vyriešenie úlohy. Študent - riešiteľ fyzikálnej úlohy - musí vykonať určitý program pozostávajúci z čiastkových činností – krokov [1]. Dôležitou súčasťou riešenia fyzikálnych úloh je vytváranie matematických modelov fyzikálnych javov. Modelovanie je jedna z teoretických metód poznania, ktorej charakteristickým znakom je poznávací proces, v ktorom poznávaný jav - originálny objekt poznania - nahrádzame modelovým objektom poznania – modelom. Pod pojmom matematický model fyzikálneho javu rozumieme súhrn matematických vzťahov schopných kvantitatívne opísať fyzikálny jav. Matematický model je abstrakciou a idealizáciou reálneho javu [2]. Model má byť zostavený tak, aby bol funkčný. Funkčnosť modelu posudzujeme podľa jeho správania sa pri zmene podmienok, za ktorých pracuje. Forma matematického modelu závisí od použitých matematických prostriedkov. V nasledujúcej časti príspevku je načrtnutý matematický model fyzikálnej úlohy riešenej v rámci predmetu Fyzika bakalárskeho štúdia na FVT TU v Košiciach so sídlom v Prešove.

2 Riešenie fyzikálnej úlohy

Zadanie fyzikálnej úlohy: Z dela pobrežného delostrelectva je pod uhlom α vystrelená delová oceľová guľa o polomere r a hustote ρ počiatocnou rýchlosťou v_0 . Určte dĺžku dostrelu gule. Úlohu riešte pre číselné hodnoty: $\alpha = 45^\circ$, $r = 0,05m$, $\rho = 7800kg.m^{-3}$, $v_0 = 1000m.s^{-1}$, $c = 0,26kg.m^{-1}$.

Riešenie:

Pri riešení úlohy vychádzame z toho, že delová guľa koná krivočiary pohyb v gravitačnom poli Zeme, ktorý nazývame šikmý vrh. Je to pohyb zložený z dvoch pohybov: rovnomerný pohyb a zvislý vrh nahor s počiatocnou rýchlosťou v_0 .

Pre zostavenie rovníc popisujúcich dráhu strely budeme vychádzať z rovnováhy síl. Pre

rovnováhu síl v smere osi x platí: $F_x + F_{ox} = 0 \Leftrightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} + cS \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = 0$, kde F_x je

podľa 2. Newtonovho zákona sila zrýchlenia v smere osi x , F_{ox} je odporová sila v smere osi x , c je koeficient aerodynamického odporu gule, S je čelná plocha strely.

Pre rovnováhu síl v smere osi y platí: $F_y + F_{oy} + F_g = 0 \Leftrightarrow m \frac{d^2y}{dt^2} + cS \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = -mg$,

kde F_y je podľa 2. Newtonovho zákona sila zrýchlenia v smere osi y , F_g je gravitačná sila, F_{oy} je odporová sila v smere osi y , c je koeficient aerodynamického odporu gule, S je čelná plocha strely.

Získali sme sústavu dvoch diferenciálnych rovníc druhého rádu bez resp. s pravou stranou:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + cS \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = 0 \qquad m \frac{d^2y}{dt^2} + cS \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = -mg \quad (1)$$

V prípade, ak neuvažujeme odpor prostredia (t. j. koeficient aerodynamického odporu $c = 0$), dostaneme sústavu rovníc pre rovnováhu síl v smere osi x a y : $m \frac{d^2x}{dt^2} = 0$ a

$m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg$, ktorých úpravou a integráciou vzhľadom na počiatocné podmienky

$y(t=0) = 0$ získame kvadratickú rovnicu: $-x^2 \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \cdot \tan \alpha = 0$ [3], z ktorej

vyplýva, že dráha pohybu delovej gule má tvar paraboly. Riešením tejto kvadratickej rovnice je hľadaná dĺžka dostrelu delovej gule $x = 101\,936,79m$.

Ak pri riešení fyzikálnej úlohy odpor vzduchu nezanedbávame, je potrebné vyriešiť sústavu diferenciálnych rovníc druhého rádu (1). Keď pre hmotnosť, objem a čelnú plochu delovej gule použijeme vzťahy $m = \rho V$, $V = \frac{4}{3} \pi r^3$, $S = \pi r^2$, zavedieme

konštantu $k = c \frac{3}{4\rho r}$ a označíme $x = h_x$ a $y = h_y$, vzťahy (1) po úprave prepíšeme do

tvaru:

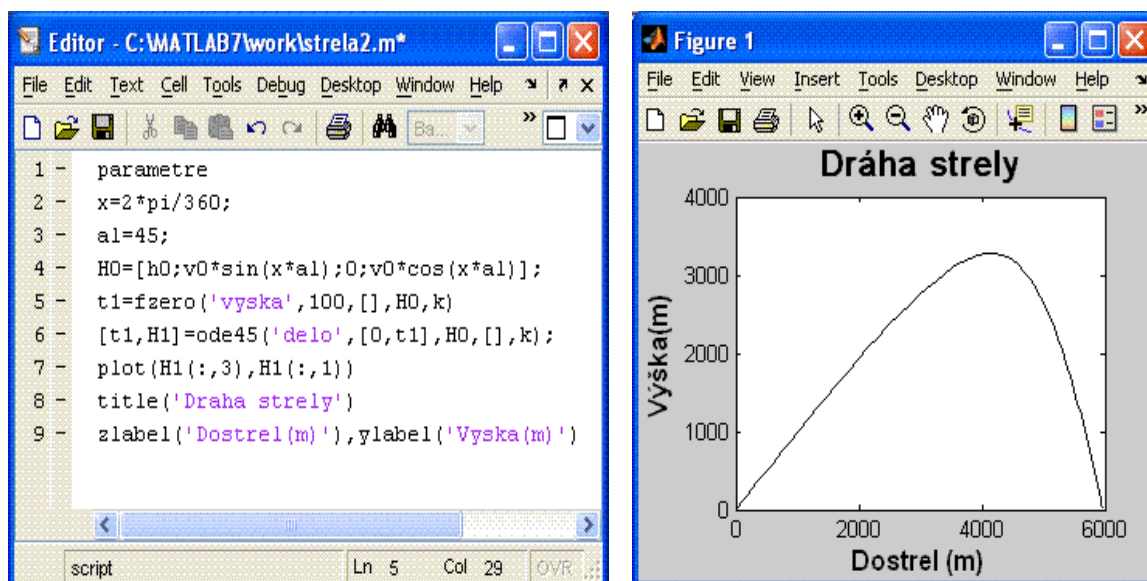
$$\begin{aligned} \frac{d^2 h_x}{dt^2} + k \left(\frac{dh_x}{dt} \right)^2 &= 0 & h_x(t=0) &= x_0 & v_x = \left. \frac{dh_x}{dt} \right|_{t=0} &= v_0 \cos \alpha \\ \frac{d^2 h_y}{dt^2} + k \left(\frac{dh_y}{dt} \right)^2 &= -g & h_y(t=0) &= y_0 & v_y = \left. \frac{dh_y}{dt} \right|_{t=0} &= v_0 \sin \alpha \end{aligned} \quad (2)$$

Dostali sme sústavu diferenciálnych rovníc druhého rádu bez resp. s pravou stranou. Analytické riešenie úlohy je zložitá a nevedie k tak jednoduchým závislostiam pre súradnice guľovej strely ako to bolo v prípade, keď sme odpor vzduchu neuvažovali. Úlohu budeme teda riešiť numericky, využitím interaktívneho programu MATLAB.

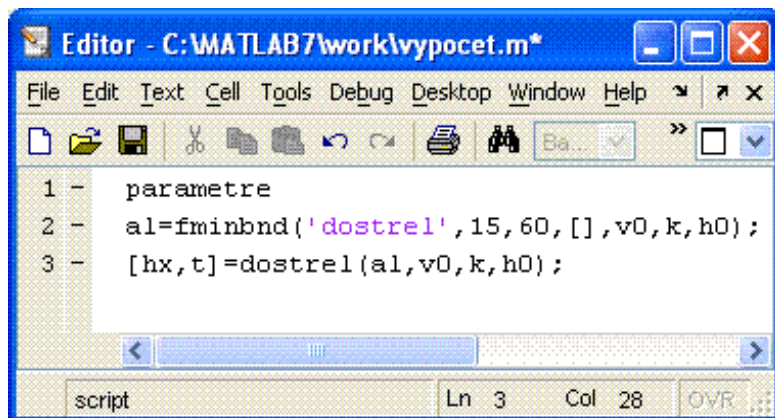
3 Využitie MATLABu pri riešení fyzikálnej úlohy

MATLAB predstavuje vysoko výkonný jazyk pre technické výpočty. Spája výpočty, vizualizáciu a programovanie do jednoducho použiteľného prostredia [4]. Ide o interaktívny prostriedok, kde základným dátovým typom je pole bez nutnosti deklarovať jeho rozmery. Táto vlastnosť spolu s množstvom zabudovaných funkcií umožňuje relatívne ľahké riešenie mnohých technických problémov. V školskom prostredí ide o štandardný nástroj vo vyučovaní napr. matematiky a iných technických predmetov, ale aj ako efektívny nástroj pre výskum, vývoj a analýzu dát.

Jedným zo spôsobov riešenia v MATLABe je vytváranie m-súborov, ktorý sme pri riešení našej úlohy použili. Vytvorili sme m-súbor, do ktorého sme prepísali sústavu diferenciálnych rovníc druhého rádu (2) vzhľadom na počiatočné podmienky na sústavu rovníc prvého rádu v tvare matic. Následne sme vytvorili skript, v ktorom sme definovali parametre používané pri riešení úlohy. Samotné riešenie pozostáva z výpočtu dĺžky a času dostrelu delovej guľe a vykreslenia dráhy strely. Na obr. 1 je vytvorený m-súbor *strela2.m* na vykreslenie vzdialenosti dostrelu delovej guľe. Graf dráhy strely delovej guľe pri danom uhle α vykreslený pomocou vytvoreného m-súboru je na obr. 2.



Obr. 1: M-súbor na vykreslenie grafu. Obr. 2: Graf dráhy strely.
Samotné riešenie úlohy potom predstavuje spustenie skriptu *vypocet.m* (obr. 3) a výpis výsledkov pre čas dostrelu t a dĺžku dostrelu h_x :



```
>> vypocet
>> t
t = 52.8071
>> hx
hx = 5.9603e+003
```

Obr. 3: M-súbor na výpočet dĺžky a času dostrelu.

Z numerického riešenia takto zostaveného matematického modelu fyzikálnej úlohy vyplýva, že dostrel delovej gule v prípade uvažovania odporu vzduchu je $x = 5\,960,3m$.

4 Záver

Z výsledkov riešenia fyzikálnej úlohy vyplýva, že výsledky získané pri riešení úlohy sa líšia vzhľadom na zostavený matematický model. Matematický model úlohy, kedy sme uvažovali aj odpor vzduchu, vedie k zložitejším vzťahom a pri riešení sme použili numerickú metódu riešenia pomocou MATLABu. Zavádzanie a využívanie informačno-komunikačných prostriedkov zatriktívňuje vyučovanie, čo pre predmety ako matematika, fyzika, chémia je potrebné, pretože sa v obľúbenosti nachádzajú na posledných miestach.

Príspevok vznikol za podpory projektu Vega č. 1/0345/08.

5 Literatúra

1. KOUBEK, V. Riešenie fyzikálnych úloh. MFF UK Bratislava, 1987.
2. KOUBEK, V., PECEN, I. Matematické modelovanie fyzikálnych javov. Fyzikálne listy č.3, 1996.
3. FECHOVÁ, E. Matematické modelovanie ako súčasť riešenia fyzikálnej úlohy. Didmatech 2007, Olomouc, 2007. ISBN 80-7220-296-0.
4. DUŠEK, F. MATLAB a SIMULINK úvod do používání. Univerzita Pardubice, 2002. ISBN 80-7194-273-1.

Lektoroval: Ľuboslav Straka, Ing., PhD.

Kontaktná adresa:

Erika Fečová, RNDr., PhD.