

METÓDY A ALGORITMY NA RIEŠENIE DEFINOVANÝCH ÚLOH OPTIMÁLNEHO RIADENIA PROCESOV

HRUBINA Kamil, SR

Resumé

Článok prezentuje niektoré autorove dosiahnuté výsledky pôvodného a aplikačného charakteru, v oblasti matematickej teórie optimálneho riadenia procesov s využitím informatiky. Je definovaná úloha optimálneho riadenia systému prostredníctvom operátorových rovníc. Ďalej sú popísané algoritmy pre numerické riešenie definovaných úloh optimálneho riadenia procesov s využitím PC.

Kľúčová slova: Systém, matematický model, problém optimálneho riadenia, operátorové rovnice, algoritmy.

METHODS AND ALGORITHMS FOR DEFINED TASKS SOLUTIONS OF PROCESSES OPTIMAL CONTROL

Abstract

The paper presents some results of original and application character obtained by its author in the field of mathematical theory of processes optimal control using informatics. The task of system optimal control using operator equations has been defined. Algorithms for numerical solution of described tasks of processes optimal control using PC are also presented.

Key words: Systems, mathematical model, optimal control problem, operators equations, algorithms

1 Úvod

V ostatných rokoch, v súvislosti s rozvojom výpočtovej a informačnej techniky sa rozširujú požiadavky na vytváranie kvalitatívne nových systémov riadenia a to optimálnych podľa vybraného ukazovateľa kvality resp. viacerých ukazovateľov. Táto skutočnosť predpokladá rozvoj teórie optimálneho riadenia procesov, systémov. V tomto vedeckom smere pôvodné práce vytvorili Bellman, Butkovskij, Lions, Pontrjagin a ďalší, [1, 2, 10, 11]. Cieľom príspevku je definovať úlohy optimálneho riadenia procesov, systémov, ktorých matematický model obsahuje operátorové rovnice. Ďalej uviesť niektoré metódy riešenia a stručnú charakteristiku ich algoritmov.

2 Niektoré pojmy z teórie optimálneho riadenia

Teória optimálneho riadenia deterministických systémov je budovaná na týchto pojmoch:

1. Riadený systém je prezentovaný operátorom A (operátor A nazývame modelom systému), ktorý definujeme.
2. Riadenie u , resp. funkcia riadenia u , ktorá je prvkom z množiny prípustných riadení U_p ; a jej pôsobením na systém sa realizuje riadenie.
3. Stav riadeného systému $y(u)$, ktorý je definovaný pre vybrané riadenie u ako riešenie rovnice $Ay(u) = \text{daná funkcia } u$, kde A je známy operátor.
4. Pozorovacia funkcia $z(u)$ ako vhodná funkcia stavu $y(u)$.

5. Kriteriaľná funkcia (účelová) $J(\mathbf{u})$ slúži na posúdenie riadiaceho procesu a je definovaná pomocou hodnôt vhodnej funkcie $z \rightarrow \phi(z) \geq 0$ na pozorovacom priestore podľa vzťahu $J(\mathbf{u}) = \phi(z(\mathbf{u}))$.

Úlohou optimálneho riadenia systému je nájsť $\inf J(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} \in U_p$

(v podstate ide o úlohu variačného počtu)

Cieľom teórie optimálneho riadenia je:

- Získať nutné (alebo nutné a postačujúce) podmienky extrému,
- Skúmať štruktúru a vlastnosti rovníc vyjadrujúcich tieto podmienky, v ktorých musí prirodzene vystupovať model A ,
- Zostaviť na základe moderných princípov algoritmy, ktoré umožňujú nájsť numerické hodnoty aproximácie riadenia $u \in U_p$, realizujúceho infimum. Takéto riadenie budeme nazývať optimálnym, [6], [7], [8].

Je zrejmé, že budovanie teórie podstatným spôsobom závisí od modelu A . Štúdiom vyššie sformulovaných otázok v bodoch a) – c) pre prípad, keď A je obyčajným diferenciálnym operátorom (prípadne s oneskorením alebo integrálno-diferenciálnym) sa zaoberá teória vytvorená Pontryaginom [11]; a od iných autorov.

V mnohých aplikáciách už zo zložitosti riadených systémov vyplýva, že namiesto uvedeného operátora A musíme skúmať operátor s parciálnymi deriváciami (ide o matematický model systémov s rozloženými parametrami). V tomto smere pôvodné práce vytvorili Lions, Butkovskij, [2], [10]. Ináč vyjadrené, ide o skúmanie systémov, ktorých stav $y(\mathbf{u})$ sa určuje ako riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice s okrajovými podmienkami a v prípade evolučných rovníc i začiatočných podmienok.

3 Riadenie systémov opísaných eliptickými parciálnymi diferenciálnymi rovnicami

V tomto príspevku použité označovanie priestorov, operátorov, ... , je v zmysle Lionsa, [10].

Nech V a H sú dva Hilbertové priestory na R , v ktorých označme normy $\|\cdot\|_V$ a $\|\cdot\|_H$ a im odpovedajúce skalárne súčiny $((\cdot, \cdot))_V$ a $((\cdot, \cdot))_H$.

Nech sú dané: priestor riadení U – Hilbertov priestor ($U = V$) a zobrazenie $B \in \mathcal{L}(V; V')$

Uvažujme systém: fyzikálny, elektrický, mechanický, ... , ktorý je opísaný známym operátorom $A \in \mathcal{L}(V; V')$.

Pre každé riadenie $\mathbf{u} \in U$ stav $y(\mathbf{u})$ systému sa určí riešením rovnice

$$A y(\mathbf{u}) = f + B \mathbf{u} , \quad y(\mathbf{u}) \in V . \quad (1)$$

Okrem toho uvažujeme pozorovanie:

$$z(\mathbf{u}) = C y(\mathbf{u}) \quad (2)$$

kde $C \in \mathcal{L}(V; H)$, H je Hilbertov priestor. Napokon, najmä pozitívne definitný hermitov operátor $N \in \mathcal{L}(U; U)$,

$$(N \mathbf{u}, \mathbf{u})_U = \nu \|\mathbf{u}\|_U^2 , \nu > 0, \quad \forall \mathbf{u} \in U \quad (3)$$

Každému riadeniu $\mathbf{u} \in U$ odpovedá hodnota kriteriaľnej funkcie účelovej:

$$J(\mathbf{u}) = \|C y(\mathbf{u}) - z_d\|_H^2 + (N \mathbf{u}, \mathbf{u})_U \quad (4)$$

kde z_d je daný element priestoru H . Nech množina U_p je konvexná a uzavretá v U .

Úloha optimálneho riadenia v tomto prípade spočíva v nájdení takého riadenia $\mathbf{u} \in U_p$, že kritériálna funkcia (4) nadobudne hodnotu

$$J(\mathbf{u}) = \inf_{\mathbf{v} \in U_p} J(\mathbf{v}) \quad (5)$$

pri splnení rovnice (1).

Pred aplikáciou teórie stavového priestoru uveďme ešte definíciu združených operátorov A^*, B^*, C^* a $\wedge_U$.

Nech $A^* \in \mathcal{L}(V; V')$ je operátor združený k A , definujme združený stav $p(\mathbf{v}) \in V$, ktorý je riešením rovnice

$$A^* p(\mathbf{v}) = C^* \wedge (C y(\mathbf{v}) - \mathbf{z}_d) \quad (6)$$

Ďalej nech $B^* \in \mathcal{L}(V, U')$ je operátor združený k B ; a U' je duálny priestor k U ; $\wedge_U$ je kanonický izomorfizmus z u na u' .

Z teóremu [4] vyplýva, že nutnou a postačujúcou podmienkou preto, aby element $\mathbf{u} \in U_p$ bol optimálnym riadením, je splnenie nasledujúcich rovníc a nerovníc:

$$A y(\mathbf{u}) = f + B \mathbf{u} \quad (7)$$

$$A^* p(\mathbf{u}) = C^* \wedge (C y(\mathbf{u}) - \mathbf{z}_d) \quad (8)$$

$$\left(\wedge_U^{-1} B^* p(\mathbf{u}) + N \mathbf{u}_1 \quad \mathbf{v} - \mathbf{u} \right)_U \geq 0, \quad \mathbf{v} \in U_p \quad (9)$$

Množina elementov $\mathbf{u}$ odpovedá množine optimálnych riadení, ktoré tvoria konvexnú uzavretú podmnožinu $X \subset U_p$, [4].

V praktických aplikáciách na numerické riešenie sú formulované úlohy optimálneho riadenia popísané parciálnymi diferenciálnymi rovnicami určitého typu, v ktorých uvažujeme pozorovanie a riadenie, ktoré je definované. Tvar operátora parciálnych derivácií vyplýva zo zadania riešenej úlohy. Potom pri splnení predpokladov a podmienok je vytvorená rovnica stavu systému, ktorej operátorový tvar v konkrétnom vyjadrení obsahuje parciálne diferenciálne rovnice. Ďalej sú definované zodpovedajúce rovnice združeného stavu systému a kritérium optimálnosti.

4 O vybraných algoritmoch

Vieme, že každá úloha optimálneho riadenia systému s rozloženými parametrami je v podstate úlohou neklasického variačného počtu. Pre numerické riešenie definovaných úloh autor vytvoril a overil algoritmy z týchto metód:

1. Numerické metódy (algoritmus metódy postupných aproximácií s využitím princípu maxima, algoritmus zovšeobecnenej metódy redukovaného gradientu ZMRG), [7], [8].

Algoritmom ZMRG môže používateľ riešiť definované diskkrétne úlohy optimálneho riadenia systémov. Numerické experimenty ukázali na uspokojivú konvergenciu algoritmu. Tento algoritmus môže byť použitý aj na riešenie zložitejších úloh, napr. na riešenie úloh dynamického lineárneho programovania.

2. Iteračné metódy lineárnej algebry, (algoritmus Jacobiho, Gauss-Seidlovej a relaxačnej metódy).

V práci [4] boli sformulované dve úlohy optimálneho riadenia systému s rozloženými parametrami, v ktorých matematický model je vyjadrený operátorovými rovnicami a nerovnicami (ide o riadenie systémov opísaných parciálnymi diferenciálnymi

rovnícami, eliptického a parabolického typu). Ak na definované úlohy uplatníme jednoduchú algebraickú transformáciu, získame klasické úlohy. Na riešenie klasických úloh môžeme použiť iteračné algoritmy algebraických metód, ktoré majú tú prednosť, že silne konvergujú k pevnému bodu (sústava rovníc stavového riadenia má maticu, ktorá je M -maticou). Algoritmus pre kontrolu chýb poskytuje možnosť predvídať maximálny počet iterácií pre dosiahnutie požadovanej presnosti výpočtu zložiek vektora riadenia a ďalších vektorov.

3. Metódy hierarchickej dekompozície (algoritmus metódy prípustných a neprípustných riešení; a metódy zmiešanej).

Riešenie problémov optimálneho riadenia systémov s rozloženými parametrami vedie po diskretizácii matematického modelu, t.j. parciálnej diferenciálnej rovnice so začiatočnými a okrajovými podmienkami na optimalizačný problém o veľkých rozmeroch, ktorý vo všeobecnosti nemôžeme riešiť priamo. Po aplikácii metódy dekompozície a hierarchie na riešený problém dostaneme úlohu, ktorú už vieme riešiť algoritmom metódy koordinácie modelov. V monografii sú uvedené dve koncepcie algoritmu metódy koordinácie, [6].

4. Metóda momentov, (algoritmus l -problému momentov).

V práci [7] sú sformulované dve úlohy optimálneho riadenia systémov s rozloženými parametrami. Je uvedený všeobecný postup použitia metódy l -problému momentov na riešenie variačnej úlohy optimálneho riadenia v systémoch, ktoré sú popísané parciálnymi diferenciálnymi rovnicami. Ďalej je vytvorený algoritmus pre prípad úlohy druhého rádu, na numerické riešenie úlohy časovej optimalizácie, v ktorej premenné sú bezrozmerné. Algoritmus umožňuje rozšírenie triedy riešených úloh využitím možností, ktoré poskytuje iteračný spôsob riešenia.

5. Metóda konečných prvkov a jej algoritmus.

V práci [5] je ukázané, že matematický model procesu opísaný bidimenziálnou parciálnou diferenciálnou rovnicou je možné vyjadriť v tvare funkcionálnej rovnice, ktorej riešenie (ak existuje) realizuje minimum funkcionálu. Pre rýchlosť konvergenzie riešenia rovnice bol odvodený vzťah. Pre minimalizáciu funkcionálov bol aplikovaný variačný princíp v spojitosti s metódou konečných prvkov, čím bol vytvorený účinný nástroj na riešenie definovaných úloh (výpočet rozloženia potenciálu, rozloženia teploty a úloh optimálneho riadenia s rozloženými parametrami). Algoritmom metódy konečných prvkov je možné riešiť úlohy stacionárneho a nestacionárneho vedenia tepla a úloh optimálneho riadenia. Pre aplikáciu algoritmu používateľ si môže definovať kritérium optimálnosti. Pre zaručenie konvergenzie funkcionálu k minimálnej hodnote je potrebné vytvoriť podprogram na určenie prírastku riadenia.

6. Algoritmus na báze teorému mini-maxu.

Prínosom vytvoreného algoritmu z metódy mini-maxu a gradientnej metódy je skutočnosť, že môžeme ním riešiť definovanú úlohu optimálneho riadenia systému s rozloženými parametrami, v ktorých je uvažovaný operátor perturbácií. Pri riešení konkrétneho problému predpokladáme, že štruktúra a parametre systému sú známe z dokumentácie alebo sú určené vhodnou metódou, napr. meraním. Takže v skutočnosti je možné vytvoriť matematický model, ktorý je prezentovaný sústavou diferenciálnych rovníc (stavu a konjugovaného stavu) a kritériálnou funkciou, čo napokon odpovedá operátorovým rovniciam, [6].

Pre použitie algoritmov v praktických aplikáciách je nutné, v prípade požiadaviek na rýchlosť a presnosť poskytovaných výsledkov, zvážiť použitie konkrétneho programovacieho prostriedku vzhľadom na konkrétny počítač a konkrétnu úlohu.

Výstavba programov bola realizovaná na báze procedúr z dôvodu širších možností a ich použitia a možných úprav navrhnutých algoritmov v etape ich overovania.

5 Záver

Článok obsahuje dôležité pojmy z matematickej teórie optimálneho riadenia procesov, resp. systémov s použitím aparátu funkcionálnej analýzy. Formuláciu úlohy optimálneho riadenia systémov v tvare operátorových rovníc a popis vytvorených algoritmov pre numerické riešenie definovaných úloh.

Článok bol vypracovaný v rámci riešenia inštitucionálnej úlohy FVT TU Košice so sídlom v Prešove č. 1/2008 a projektu VEGA MŠ SR č. 1/4077/07.

6 Literatúra

1. BELLMAN, R. Dynamic programming, New York, *Princeton University Press*, 1967
2. BUTKOVSKIJ, A. G. *Metody upravlenija sistemami s raspredelenymi parametrami*, Nauka, Moskva, 1975
3. HRUBINA K. Optimal control problems for systems with distributed parameters and their solution using algorithms of numerical methods. *Electrical Engineering Journal*, r. 43, č. 6, 1992, pp. 187-192
4. HRUBINA K. Solving optimal control problems for systems with distributed parameters by means of iterative algorithms of algebraic methods. *Kybernetika a informatika*, roč. 6, č. 1, 1993, s. 48-64
5. HRUBINA K. Optimum control problems for systems with distributed parameters and their solution using the finite element method algorithm. *Journal of Electrical Engineering*, r. 44, No. 1, 1993, pp. 11-20
6. HRUBINA K. Optimal Control of Processes based on the use of Informatics Methods, Informatech Košice, 2005, 286 s., ISBN 80-88941-30-X
7. HRUBINA K. – JADLOVSKÁ, A. Optimal control problems solved by the Application of Algorithms of Numerical Method, Chapter 26, *DAAAM International Scientific Book 2004*, pp. 265-282, Vienna, Austria, ISBN 3-901509-38-0, ISSN 1726-9687
8. HRUBINA K. – JADLOVSKÁ, A. Optimal control and Approximation of Variational Inequalities, *Kybernetika*, The International Journal of Systems and Cybernetics, MCB University Press of England, Vol. 31, No. 9/10, 2002, pp. 1401-1408
9. HRUBINA K. Numerické riešenie úloh optimálneho riadenia systémov s rozloženými parametrami využitím algoritmov algebraických metód. *Manufacturing Engineering/Výrobné inžinierstvo*. FVT TU Prešov, č. 2, roč. 2007, s. 81-84
10. LIONS, J. L. Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des equations aux derives partielles, *Dunod Gautier-Villars*, Paris, 1986
11. PONTRYAGIN, L. S. et al. *Matematičeskaja teorija optimal'nych procesov*, Nauka, Moskva, 1983
12. ZADEH, L. A. – DESOER, C. A. *Linear System Theory*. The State Space Approach. Mc Graw-Hill, 1963

Lektoroval: Doc. RNDr. Ing. Miloš ŠEDA, Ph.D.

Kontaktná adresa

Kamil Hrubina, doc. Ing. Mgr., PhD., Katedra matematiky, informatiky a kybernetiky
Fakulta výrobných technológií TU v Košiciach so sídlom v Prešove, Bayerova 1, 080 01
Prešov, SR, tel. +421 51 7723 931, fax +421 51 7733 453, e-mail: hrubina.kamil@fvt.sk