

WYBRANE ASPEKTY KOMPUTEROWEGO WSPOMAGANIA ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH ZWYCZAJNYCH

JEDYNAK Radosław, RP

Streszczenie

Artykuł prezentuje możliwości wykorzystania komputerowych aplikacji do wspomaganie obliczeń matematycznych, na przykładzie rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych. Równania różniczkowe pojawiają się bardzo często w różnych naukach nie tylko matematycznych, technicznych ale również przyrodniczych i innych. Stąd umiejętność ich sprawnego rozwiązywania jest bardzo istotna.

Słowa kluczowe: komputerowe wspomaganie obliczeń matematycznych, Mathematica, MS Excel

SOME ASPECTS OF THE AIDED COMPUTER SOLVING OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abstract

The article presents the possibilities of utilization of the computer applications to aid the mathematical calculations, on the example of solving ordinary differential equations. Differential equations very often appear in various subjects not only in mathematics, engineering sciences but also natural and different once. Hence the efficient skills of their solving are important.

Key Words: the computer aided of mathematical calculations, Mathematica, MS Excel

1 Wstęp

Równania różniczkowe zrodziły się z potrzeby opisu otaczającej nas rzeczywistości, począwszy od przyrody, fizyki czy chemii. Dlatego teoria równań różniczkowych stanowi ważny pomost między matematyką a naukami przyrodniczymi.

Artykuł prezentuje metody rozwiązywania wybranych równań różniczkowych zwyczajnych przedstawione na przykładzie dwóch wybranych aplikacji komputerowych. Równania różniczkowe bardzo rzadko dają się rozwiązać analitycznie, w związku z tym zdarza się często, że można je rozwiązać w sposób przybliżony (numerycznie), za pomocą odpowiednich aplikacji matematycznych.

Rozdział pierwszy to praktyczne zastosowanie teorii numerycznej w arkuszu kalkulacyjnym MS Excel. Obejmuje ćwiczenie rozwiązane metodą Runge-Kutty. Kolejny rozdział podaje przepis rozwiązania tego samego równania różniczkowego w programie Mathematica dwoma sposobami: metodą symboliczną i przybliżoną.

2 Rozwiązywanie równań różniczkowych w arkuszu MS Excel

Pierwotnie arkusze kalkulacyjne były projektowane z przeznaczeniem przede wszystkim dla księgowych. Aktualnie arkusze są jednak również bogatymi w możliwości narzędziami obliczeniowymi, nie tylko dla naukowców i inżynierów, ale wszystkich wykorzystujących oprogramowanie komputerowe, w tym uczniów i studentów.

W poniższym rozdziale jest zaprezentowany przykład, na podstawie którego można nauczyć się jak wykorzystywać Excel do rozwiązywania równań różniczkowych. Jako metodę numeryczną wybrano bardzo popularną metodę Runge-Kutty czwartego rzędu.

W metodzie Runge-Kutty każde kolejne przybliżenie wartości y_{n+1} zależy od wartości poprzedniej y_n . Formułę iteracyjną pokazuje równanie (1) [2].

$$(1) \quad \begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ k_1 = h f(x_n, y_n), \\ k_2 = h f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_1), \\ k_3 = h f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_2), \\ k_4 = h f(x_n + h, y_n + k_3). \end{cases}$$

Przykład 1 Rozwiążemy równanie $\frac{dy}{dx} = x y$ dla początkowej wartości $y(0) = 1$.

Rozwiązanie rozpoczynamy od wprowadzenia stosownych komentarzy i oznaczeń (obszar A1:G5 arkusza) pokazanych na rysunku 1. Następnie wypełniamy komórki A6:A11 serią wartości od 0 do 5 oraz komórki B6:B11 wartościami od 0 do 0,5. Wartość początkową $y=1$ wpisujemy w komórce C6 (odpowiada ona y_0 w równaniu (1)). Kolejnym krokiem jest zdefiniowanie odpowiednich formuł, do obliczenia parametrów k_1 , k_2 , k_3 i k_4 , dla komórek D6, E6, F6 i G6. Zgodnie ze wzorem (1) mają postać:

D6: $=h*(B6*C6)$, E6: $=h*((B6+h/2)*(C6+D6/2))$,

F6: $=h*((B6+h/2)*(C6+E6/2))$, G6: $=h*((B6+h)*(C6+F6))$.

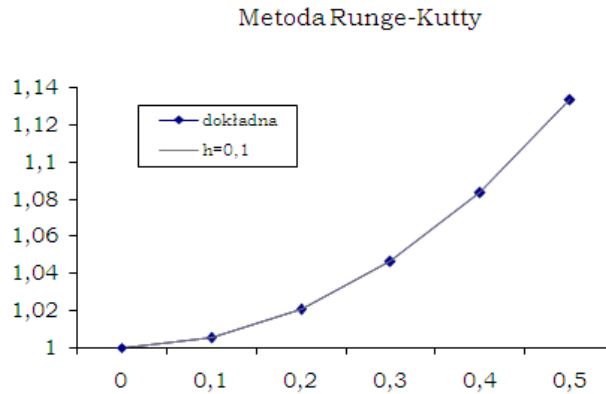
Pierwszą wartość przybliżoną y_1 obliczamy w komórce C7 za pomocą formuły $=C6+(1/6)*(D6+2*E6+2*F6+G6)$. Tak otrzymane formuły kopiujemy na pozostały obszar. Rysunek 1 przedstawia fragment arkusza z otrzymanym przybliżonym rozwiązaniem (metodą Runge-Kutty) równania $y'(x) = x y$.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Metoda Runge-Kutty							
2	Równanie różniczkowe $dy/dx=xy$ z warunkiem brzegowym $y(0)=1$							
3								
4		h=	0,1					
5	i	x	y	k1	k2	k3	k4	Błąd
6	0	0	1	0	0,005	0,005013	0,01005	0,00000
7	1	0,1	1,005013	0,01005	0,015151	0,015189	0,020404	-2,60676E-11
8	2	0,2	1,020201	0,020404	0,02576	0,025827	0,031381	-2,68387E-10
9	3	0,3	1,046028	0,031381	0,03716	0,037261	0,043332	-1,02275E-09
10	4	0,4	1,083287	0,043331	0,049723	0,049867	0,056658	-2,85446E-09
11	5	0,5	1,133148					-6,94929E-09

Rysunek 1. Rozwiązanie równania różniczkowego $y'(x) = x y$ metodą Runge-Kutty

W celu porównania dokładności obliczeń, wyznaczono na drodze analitycznej dokładne rozwiązanie. Jest nim funkcja $y = e^{\frac{x^2}{2}}$. W kolumnie H obliczono różnice

pomiędzy wartościami przybliżonymi (kolumna C) a dokładnymi. Z obliczeń wynika, że błąd bezwzględny jest bardzo mały, czyli metoda ta doskonale sprawdza się do rozwiązywania równań różniczkowych. Wykres rozwiązania równania z krokiem $h=0,1$ przedstawia rysunek 2.



Rysunek 2. Wykres prezentujący rozwiązanie przykładu 1 w Excelu

3 Rozwiązywanie równań różniczkowych w Mathematica

Istnieje kilka programów matematycznych, które potrafią rozwiązywać symbolicznie i numerycznie równania różniczkowe. Wśród nich bardzo dużym powodzeniem cieszy się pakiet Mathematica. Stanowi on uniwersalne środowisko do modelowania matematycznego. Pozwala realizować różnorodne zadania: od najprostszych obliczeń po zaawansowane zagadnienia matematyki wyższej. Do znalezienia rozwiązania równań różniczkowych zwyczajnych możemy zastosować dwa polecenia **DSolve** oraz **NDSolve**.

Instrukcja **DSolve** rozwiązuje równania różniczkowe zwyczajne w sposób symboliczny, zaś **NDSolve** wykorzystuje metody numeryczne. Ich składnie są następujące:

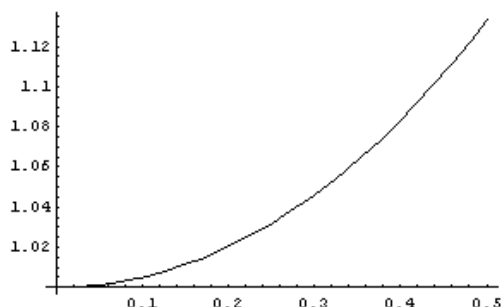
- **DSolve[równanie, y[x], x]** - podaje rozwiązanie równania różniczkowego ze względu na $y[x]$, przyjmując x jako zmienną niezależną,
- **NDSolve[równanie, y, {x, $x_{\min}$, $x_{\max}$ }]** – rozwiązuje numerycznie równanie różniczkowe ze względu na y , ze zmienną niezależną x z przedziału $[x_{\min}, x_{\max}]$. Rozwiązanie przedstawia za pomocą funkcji aproksymacji (*InterpolatingFunction*).

Przykład 2 Rozwiążemy równanie z przykładu 1 wykorzystując program Mathematica .

```
In[1]:= DSolve[{y'[x] == x y[x], y[0] == 1}, y, x]
NDSolve[{y'[x] == x y[x], y[0] == 1}, y, {x, 0, 0.5}]

Out[1]= {{y -> Function[{x}, e^(x^2/2)]}}
Out[2]= {{y -> InterpolatingFunction[{{0., 0.5}}, <>]}}
```

```
In[3]:= rys1 = Plot[Evaluate[y[x] /. %], {x, 0, 0.5}];  
      rys2 = Plot[Exp[0.5 x^2], {x, 0, 0.5}];  
      Show[rys1, rys2]
```



Rysunek 3. Rozwiązanie równania $y'(x) = xy(x)$ w programie Mathematica

4 Podsumowanie

Bardzo często rozwiązywanie równań różniczkowych w sposób analityczny jest dość pracochłonne lub niemożliwe. W związku z tym, w artykule pokazano jak można wykorzystać określone aplikacje komputerowych, by łatwo rozwiązywać równania. W przypadku arkusza kalkulacyjnego należy skorzystać z określonej metody numerycznej, zaś w zaawansowanych aplikacjach matematycznych mamy dostępne gotowe polecenia, które znajdują stosowne rozwiązania.

Wybór arkusza kalkulacyjnego Microsoft Excel, jest związany z jego ogromną popularnością. Jest on nauczany na wszystkich poziomach edukacyjnych w Polsce: począwszy od szkoły podstawowej a kończąc na szkolnictwie wyższym. Pakiet Mathematica jest uznanym międzynarodowym programem, wspomagającym szereg obliczeń matematycznych ze wszystkich dziedzin działalności ludzkiej. Pakiet ten wykorzystywany jest na zajęciach „Aplikacje matematyczne”, które prowadzone są w Katedrze Matematyki Politechniki Radomskiej. Posiada funkcje, dzięki którym, nadaje się do rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych.

W artykule pokazano możliwości, jakie stwarzają programy Excel i Mathematica, gdy poszukujemy rozwiązania równania różniczkowego. Artykuł ten ma służyć popularyzacji, wśród wykładowców i studentów różnych nauk, korzystania z określonych aplikacji komputerowych w celu wspomagania złożonych obliczeń matematycznych, na przykładzie rozwiązywania równań różniczkowych.

5 Literatura

1. DRWAL G.- GRZYMKOWSKI R.- KAPUSTA A.- SŁOTA D. „Mathematica 5”. Wydawnictwo Pracowni Komputerowej Jacka Skalmierskiego, Gliwice 2004r., 840 s. ISBN 83-89105-57-8
2. KINCAID W.- CHENNY W., Analiza Numeryczna, WNT, 2005, 692 s., ISBN 83-204-3078-X

Recenzował: Prof. Ing. Ladislav Varkoly

Adres kontaktowy:

Radosław Jedynak, PhD - Institute of Mathematics, Pedagogical Faculty, Malczewskiego 20a, Poland, Technical University of Radom, Radom, Poland, phone 048 48 3617 814, fax 048 48 3617 803, e-mail jedynakr@pr.radom.pl