

O METÓDE NAJMENŠÍCH ŠTVORCOV PRE IDENTIFIKÁCIU KOEFICIENTOV DIFERENCIÁLNEJ ROVNICE APM

MAJERČÁK Jozef – HRUBINA Kamil, SR

Resumé

V príspevku je skúmaná možnosť použitia metódy najmenších štvorcov na identifikáciu koeficientov diferenciálnej rovnice, ktorá je matematickým modelom umelého pneumického svalu (APM), z nameraných hodnôt.

Kľúčové slová: metóda najmenších štvorcov, identifikácia, matematický model.

ON THE METHOD OF LEAST SQUARES APPLIED TO THE IDENTIFICATION OF COEFFICIENTS OF A DIFFERENTIAL EQUATION OF APM

Abstract

The contribution investigates the possibility of the method of least squares utilization for the identification of coefficients of a differential equation which, based on the measured values, is a mathematical model of an artificial pneumatic muscle (APM).

Key words: method of least squares, identification, mathematical model.

1 Úvod

V mnohých vedných odboroch sa často stretávame s požiadavkou charakterizovať funkčnú závislosť, ktorá je opísaná súborom nameraných hodnôt, resp. empirických pozorovaní.

V aplikovanej matematike má dôležité miesto téma aproximácia funkcií. Jej podstatný význam spočíva v tom, že v aplikovanej matematike, ale aj v praxi potrebujeme nahradiť danú funkciu $f(x)$ nejakou inou funkciou $\varphi(x)$, ktorej priebeh má v danom intervale podobné správanie ako funkcia $f(x)$ a zároveň sa funkcia $\varphi(x)$ ľahko spracováva.

Cieľom príspevku je uviesť metódu najmenších štvorcov na identifikáciu koeficientov diferenciálnej rovnice, ktorá je matematickým modelom „umelého pneumického svalu“ (APM).

2 Metóda najmenších štvorcov parametrickej identifikácie

Na identifikáciu systémov budeme uvažovať metódu najmenších štvorcov, ktorá patrí do skupiny parametrickej identifikácie.

Uvažujme všeobecný model identifikovaného systému v tvare:

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \hat{x}(a, u) = \sum_{i=0}^n a_i P_i(u) \\ &= a_0 P_0(u) + a_1 P_1(u) + \dots + a_n P_n(u)\end{aligned}\tag{1}$$

kde

- $P_0(u), P_1(u), P_2(u), \dots, P_n(u)$ sú známe funkcie
- $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ sú neznáme parametre
- $\hat{x}$ je vypočítaná, výstupná veličina

K dispozícii musíme mať dvojicu meraní (u_i, x_i) – (vstup, výstup), $i = 0, 1, 2, 3, \dots, m$, kde m je počet meraní. V skutočnosti je úlohou nájsť hodnoty neznámych parametrov „ a “, aby rozdiel medzi odhadnutou a nameranou hodnotou veličiny „ x “, v zmysle zvoleného kritéria bol minimálny. Kritérium označujeme v tvare:

$$J(a) = J(a, u, x) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \varepsilon_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n [x_i - \hat{x}_i(a, u_i)]^2 \quad (2)$$

- ε_i je chyba pre i -té meranie

Zavedme ďalej označenie:

$$\begin{aligned} a &= [a_0, a_1, \dots, a_n]^T & P &= [P_0, P_1, \dots, P_n]^T \\ \varepsilon &= [\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n]^T & u &= [u_0, u_1, \dots, u_n]^T \end{aligned}$$

Kritérium (2) vyjadríme v matematickom tvare:

$$J(a) = \frac{1}{2} \varepsilon^T \cdot \varepsilon = \frac{1}{2} \|\varepsilon\|^2 = \frac{1}{2} \|x - P(a)\|^2 \quad (3)$$

Algoritmom metódy najmenších štvorcov určíme parametre „ a “ definovanej úlohy tak, aby kritérium $J(a)$ podľa rovnice (3) nadobudlo minimálnu hodnotu. Kritérium (3) bude mať minimálnu hodnotu pre také $\hat{a}$, pre ktoré je splnená nasledujúca rovnosť, [5] a [9].

$$P^T \cdot P \cdot \hat{a} = P^T \cdot x \quad (4)$$

Je zrejmé, že ak matica $P^T \cdot P$ je regulárna existuje jednoznačné riešenie rovnice (4) po vyjadrení:

$$\hat{a} = (P^T \cdot P)^{-1} \cdot P^T \cdot x \quad (5)$$

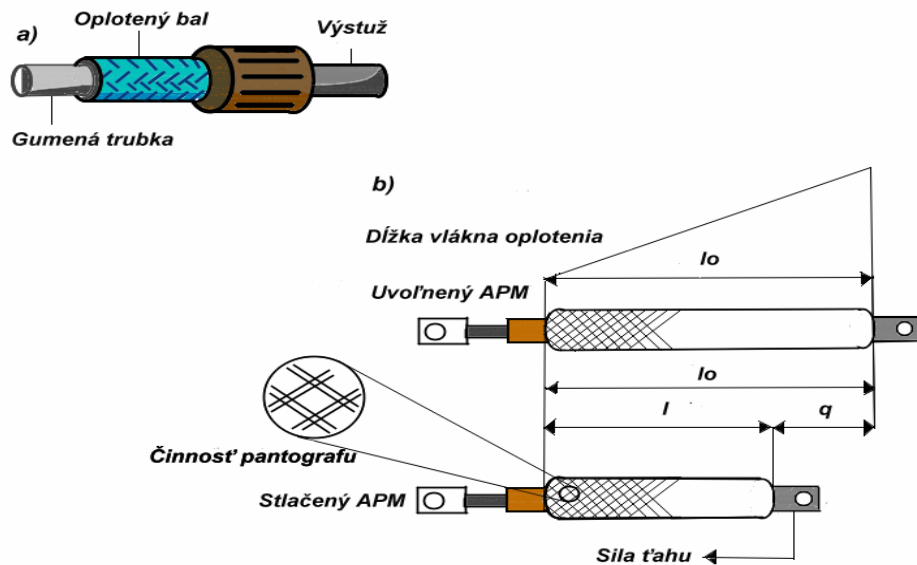
V prípade, že pre identifikáciu dynamického systému použijeme aproximáciu na báze polynómov, tak môžeme zobrať do úvahy:

1. Zovšeobecnené polynómy $P_i(u) = u^i$
2. Čebyševove polynómy $P_i(u) = T_i(u-1)$,

napr. ak zvolíme $n = 2$, dostaneme: $\hat{x}(a, u) = \sum_{i=0}^n a_i P_i = a_0 + a_1 \cdot (2u-1) + a_2 \cdot (8u^2 - 8u + 1)$.

3 Identifikácia koeficientov matematického modelu APM

Modelovanie a riadenie pneumatického aktuátora nazývaného „umelý pneumatický sval“ (APM), je z teoretického hľadiska zložitý problém. Riadenie APM je značne zložitá vzhľadom na jeho jednoduchú konštrukciu, najmä pre jeho nelineárnosť stlačiteľnosť vzduchu, časove premenlivé vlastnosti ako aj ťažkosti v analytickom modelovaní, obr. 1a, b.



Obr. 1: Základný návrh umelého pneumatického svalu (a), jeho princíp funkcie (b).

Vo všeobecnosti je APM skúmaný z hľadiska teórie nelineárnych systémov, nakoľko matematický model je vyjadrený nelineárnou diferenciálnou rovnicou druhého rádu v tvare

$$M\ddot{x} + B(\dot{x})\dot{x} + K(x)x = u \quad (6)$$

alebo, ak predpokladáme, že celková hmotnosť je jednotková, t.j. $M=1$; a ostatné fyzikálne veličiny majú obvyklý význam vid'. lit. [1,2,3,4,5,6], pričom nelineárne funkcie označíme $f_1(\dot{x}), f_2(x)$, tak rovnicu (6) môžeme vyjadriť takto:

$$\ddot{x} + f_1(\dot{x})\dot{x} + f_2(x) \cdot x = u^* \quad (7)$$

Táto rovnica je ekvivalentná sústave diferenciálnych rovníc prvého rádu

$$\begin{aligned} (x_1 = x \text{ a } x_2 = \dot{x}) \quad \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u - f_1(\dot{x})\dot{x} - f_2(x)x \end{aligned} \quad (8)$$

alebo v maticovom vyjadrení

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f_2(x_1) & -f_1(x_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (9)$$

a

$$y(t) = x(t) = x_1(t) \quad (10)$$

Ďalej predpokladáme, že nelineárne funkcie $f_1(x_2), f_2(x_1)$ môžeme vyjadriť prostredníctvom polynómov druhého stupňa, t.j.

$$\begin{aligned} f_1(x_2) &= B(x_2) x_2 \\ f_2(x_1) &= K(x_1) x_1 \end{aligned} \quad (11)$$

a položíme

$$\begin{aligned} B(x_2) &= b_2 x_2^2 + b_1 x_2 + b_0 \\ K(x_1) &= a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0 \end{aligned} \quad (12)$$

Koeficienty b_i, a_i ($i = 0, 1, 2$) môžeme získať identifikáciou z nameraných hodnôt

$K(x_1) = K(x)$ reprezentuje model (inflation and deflation – hard spring)

$B(x_2) = B(\dot{x})$ reprezentuje model (inflation and deflation), [2,3].

4 Záver

V príspevku je prezentovaná parametrická metóda najmenších štvorcov a možnosť jej použitia na identifikáciu koeficientov diferenciálnej rovnice – matematického modelu (APM), z nameraných hodnôt.

5 Literatúra

- 1 ATHANS, M., FALB, P.: Optimal Control (An introduction to the Theory and Its Applications). McGRAW – HILL BOOK COMPANY, New York, 1966, 867 p.
- 2 BALARA, M., PITEĽ, J.: Koncepcia riadenia aktuátora s pneumatickými umelými svalmi s. 74-78 In: M. Balara „The research of the dynamical systems and possibility of its synthesis development”. Scientific Annual, FVT TU Prešov, 120 s., 2007, ISBN 978-80-8073-855-6.
- 3 GÖLDER, K., KUBIK, S.: Nichtlineare Systeme der Regelungstechnik. VEB Verlag Technik. Berlin, 1983.
- 4 HUBA, M. et al (Editors): Modern Control theory. Progetto Leonardo. Societa Editrice ESCULAPIE, Bratislava – Roma, 1999, p. 183, ISBN 88-86524-36-6.
- 5 HRUBINA, K. et al: Optimal Control of Process based on the use of Informatics Methods, Informatech, Ltd. Košice, p. 287, ISBN 80-88941-30-X.
- 6 HRUBINA, K.: Stabilita a tvorba Ljapunovových funkcií nelineárnych systémov, s. 5-17. In: Balara, M. a kol.: Modelovanie, simulácia a verifikácia vybraných mechatronických systémov. Librix.eu Brno 2008, 136 s. ISBN 978-80-7399-541-6.
- 7 JADLOVSKÁ, A.: The Dynamic processes Modeling and Control using the Neuron Networks. Scientific Writing Edition of the FEI TU Košice, Informatech, Ltd. Košice, p. 172, ISBN 80-88941-22-9.
- 8 LJAPUNOV, A. M.: Občaja zadača ob ustojčivosti dviženija. Gosteizdat, Charkov, 1950.
- 9 MAJERČÁK, J. : K obsahu cvičení o metóde najmenších štvorcov v aplikovanej matematike na FVT. s. 1-6. ARTEP 2009, SjFTU Košice 2009 (v tlači).
- 10 PITEĽ, J., BALARA, M.: Model aktuátora s pneumatickými umelými svalmi. s. 64-67, In: M. Balara: The research of the dynamical systems and possibility of its synthesis development. Scientific Annual, FVT TU Prešov, 120 s., 2007, ISBN 978-80-8073-855-6.

Lektoroval: Doc. Ing. Anna Jadlovská, PhD.

Kontaktná adresa:

Doc. Ing. Anna Jadlovská, PhD. Technická univerzita Košice, Fakulta elektrotechniky a informatiky. Katedra umelej inteligencie. Letná 6, 040 01 Košice, SR,
Tel. 055 0903 496 663 E-mail anna.jadlovska@tuke.sk