

ANALÝZA RIEŠENIA MATEMATICKÝCH MODELOV V DYNAMIKE

LABAŠOVÁ Eva – TRUBENOVÁ Jaroslava, SR

Resumé

V mnohých technických odvetviach sa pri riešení problémov využívajú výpočtové - matematické modely, ktoré opisujú a skúmajú správanie sa reálneho objektu. Analýza matematického modelu predstavuje riešenie vytvorenej sústavy rovníc. Príspevok poukazuje na aplikáciu matematických poznatkov pre študentov technických univerzít. Konkrétne poukazuje na využitie poznatkov získaných v oblasti diferenciálnych rovníc pri riešení kmitavého pohybu tuhých telies.

Kľúčová slová: vlastná kruhová frekvencia netlmenej a tlmenej sústavy, lineárna diferenciálna rovnica 2. rádu, rezonančná frekvencia, amplitúdovo-frekvenčná charakteristika

ANALYSIS OF SOLUTION OF THE MATHEMATICAL MODELS IN DYNAMICS

Abstract

In many technical branches, computer mathematical models describing and examining real object behaviour are used during problem solving. Mathematical model analysis represents a solution of the given system of equations. This contribution suggests an application of mathematical knowledge for students of technical universities. In particular, it points at utilisation of knowledge obtained in the area of differential equations, in solution of the solid body oscillation movement.

Key words: natural circular frequency of undamped and damped of the system, linear differential equation second level, critical frequency, amplitude-frequency characteristics

1 Úvod

Výpočet rôznych technických parametrov v priebehu technologických procesov patrí k práci strojníckych, či materiálovo-technologických inžinierov. V odbornom technickom vzdelávaní preto predmety ako matematika, fyzika tvoria vedomostnú bázu pre nadväzujúce predmety. Zvlášť matematika tak spĺňa určité špecifické funkcie pre odborné predmety a tie zase vytvárajú predpoklady pre prácu v budúcej profesii.

Napr. z pohľadu mechaniky tuhých telies je dôležitou aplikáciou pre prax mechanické kmitanie, resp. určenie parametrov, ktoré charakterizujú kmitavý pohyb telies, či technologických systémov. Na určovanie parametrov kmitajúcich telies sa vytvárajú mechanické a následne matematické modely.

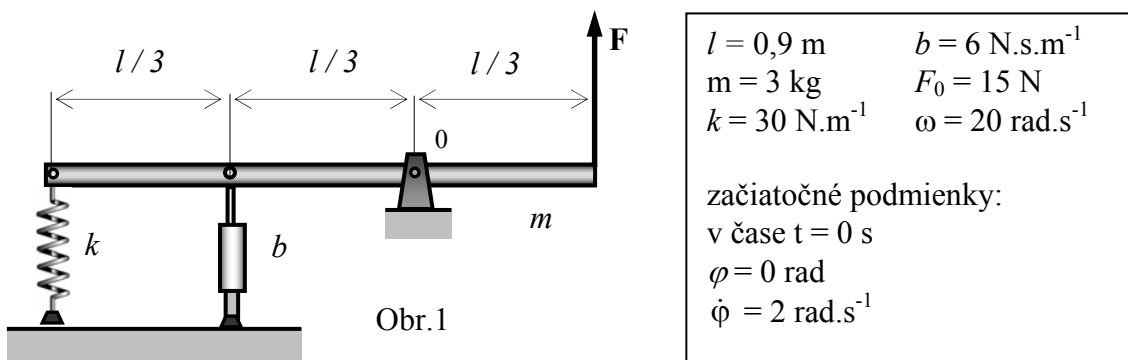
Matematické modely predstavujú v tomto prípade lineárne diferenciálne rovnice. Príspevok poukazuje na aplikáciu vedomostnej bázy z matematiky v odborných predmetoch. Analýzou vytvorených matematických modelov získavame informácie o možnom správaní sa kmitajúcich systémoch.

2 Zostavenie výpočtového modelu jednoduhotnej kmitajúcej sústavy

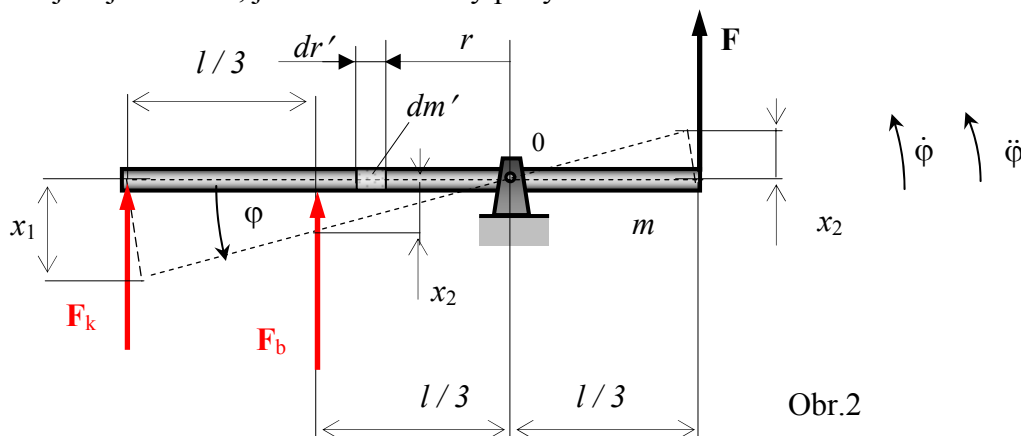
Na základe vyučovacích cieľov predmetu Mechanika tuhých telies by študenti mali vedieť okrem iného vyjadriť parametre charakterizujúce kmitavý pohyb telies. Pre výpočet parametrov potrebujú zostaviť dynamický model a následne matematický model. Pri zostavovaní rovníc matematického modelu vychádzame z pohybových rovníc jednotlivých telies systému.

V nasledujúcej časti je ukázaný princíp riešenia jednej z úloh, ktoré študenti riešia v rámci výpočtových cvičení v danom predmete. Pri riešení príkladov si študenti majú osvojiť najmä technické myslenie, spôsoby a pravidlá, ktoré je potrebné dodržiavať. V nemalej miere si majú uvedomiť nutnosť osvojenia si matematických poznatkov a schopnosť ich aplikácie pri riešení konkrétnych technických problémov.

Obr. 1 predstavuje dynamický model kmitajúcej sústavy s jedným stupňom voľnosti pohybu. Kmitajúca sústava je tvorená homogénnou pákou, hmotnosti m , konštantného prierezu, na ktorú je pripojená pružina s tuhosťou k a tlmič, ktorého súčiniteľ lineárneho tlmenia je b . Na tyč pôsobí harmonická budiaca sila F .



Metódou zrýchľujúcich síl [1] je zostavená pohybová rovnica pre výpočtový model na obr. 2. Sústava koná vynútený kmitavý pohyb okolo rovnovážnej polohy prechádzajúcej bodom 0, jedná sa o rotačný pohyb.



Pohybová rovnica:

$$I_0 \ddot{\varphi} = \sum M_{i0} = \frac{1}{3} l F - \frac{2}{3} l F_k - \frac{1}{3} l F_b, \text{ kde} \quad (1)$$

$$\text{sila v pružine je: } F_k = k x_1, \quad (2)$$

$$\text{sila v tlmiči je: } F_b = b \dot{x}_2, \quad (3)$$

harmonická budiaca sila je: $F = F_0 \sin(\omega t)$, (4)

kde F_0 je amplitúda budiacej sily a ω je kruhová frekvencia budiacej sily ,

I_0 je moment zotrvačnosti páky vzhľadom na os rotácie.

Moment zotrvačnosti páky k osi rotácie je daný vzťahom [1]:

$$I_0 = \int_{(m)} r^2 dm' = \frac{m}{l} \int_{-\frac{2}{3}l}^0 r^2 dr' + \frac{m}{l} \int_0^{\frac{1}{3}l} r^2 dr' = \frac{m}{l} \left[\frac{0 - \left(-\frac{2}{3}l\right)^3}{3} \right] + \frac{m}{l} \left[\frac{\left(\frac{1}{3}l\right)^3 - 0}{3} \right] = \frac{m}{9} l^2 \quad (5)$$

Vyjadrenie posunutí x_1, x_2 v závislosti od natočenia φ :

$$\sin \varphi = \frac{x_1}{\frac{2}{3}l} \Rightarrow x_1 = \frac{2}{3}l \sin \varphi = \frac{2}{3}l \varphi; \quad x_2 = \frac{1}{3}l \varphi, \quad (6)$$

kde pre hodnoty uhlov $\varphi < 5^\circ$ platí: $\sin \varphi \approx \varphi$, pričom φ je v radiánoch ($5^\circ = 0,087$ rad).

Pre rýchlosť bodu, v ktorom je pripojený tlmič platí:

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{3}l\dot{\varphi}. \quad (7)$$

Dosadením (2) až (6) do (1) a úprave získame pohybovú rovnicu v tvare:

$$\ddot{\varphi} + \frac{b}{m}\dot{\varphi} + \frac{4k}{m}\varphi = \frac{3}{ml}F_0 \sin(\omega t) \quad , \text{ resp.} \quad (8)$$

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \frac{3F_0}{ml}\sin(\omega t) \quad , \quad (9)$$

kde $\delta = \frac{b}{2m}$ - pomerný útlm,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4k}{m}} \quad - \text{vlastná kruhová frekvencia pre netlmenú sústavu.}$$

Pre vlastnú kruhovou frekvenciu tlmenej sústavy za predpokladu, že $\omega_0 > \delta$ platí:

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad (10)$$

Rovnica (9) predstavuje matematický model a z hľadiska matematického predstavuje lineárnu diferenciálnu rovnicu druhého rádu s konštantnými koeficientami s pravou stranou.

3 Analýza výpočtového modelu – diferenciálnej rovnice

Celkové riešenie - $\varphi_c(t)$ diferenciálnej rovnice (9) sa skladá zo všeobecného riešenia homogénnej diferenciálnej rovnice prislúchajúcej diferenciálnej rovnici (9) - $\varphi_h(t)$ a partikulárneho riešenia diferenciálnej rovnice (9) - $\varphi_p(t)$ [2]:

$$\varphi_c(t) = \varphi_h(t) + \varphi_p(t). \quad (11)$$

Homogénnu časť riešenia diferenciálnej rovnice vo všeobecnosi možno napísať v tvare:

$$\varphi_h(t) = e^{-\delta t} [C_1 \cos(\omega_d t) + C_2 \sin(\omega_d t)], \text{ resp.} \quad (12)$$

$$\varphi_h(h) = C_1 e^{\left(-\delta + \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\right)t} + C_2 e^{\left(-\delta - \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\right)t}, \quad (13)$$

kde C_1, C_2 sú integračné konštanty, ktoré určíme zo začiatočných podmienok.

Pri určení partikulárneho riešenia využijeme skutočnosť, že pravá strana diferenciálnej rovnice (9) má špeciálny tvar. Partikulárne riešenie pre tento tvar pravej strany hľadáme v tvare:

$$\varphi_p(t) = A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t), \quad (14)$$

kde A, B sú konštanty, ktoré určíme z podmienky, že takto navrhnutá funkcia má byť riešením diferenciálnej rovnice (9). Po úprave môžeme partikulárne riešenie písať v tvare :

$$\varphi_p(t) = C \sin(\omega t - \varphi), \quad (15)$$

V predmete Mechanika tuhých telies býva analytické riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice sprostredkované len v rámci prednášok. Učítelia sú nútení odvolávať sa na znalosti a vedomosti z oblasti diferenciálnych rovníc, ktoré študenti mali získať v predmete Lineárna algebra [3].

Numerické riešenie je potom taktiež možné sprostredkovať študentom len v rámci prednášok, ktoré sa tým môžu stať pre študentov zaujímavejšie. Zakreslenie grafov riešenia $\varphi_h(t)$ homogénnej diferenciálnej rovnice, partikulárneho riešenia $\varphi_p(t)$ a celkového riešenia $\varphi_c(t)$ umocňuje predstavivosť a lepšie pochopenie učiva zo strany študentov. Analytickým a numerickým riešením danej diferenciálnej rovnice zároveň študentov upozorňujeme na prepojenie odborných predmetov s matematikou.

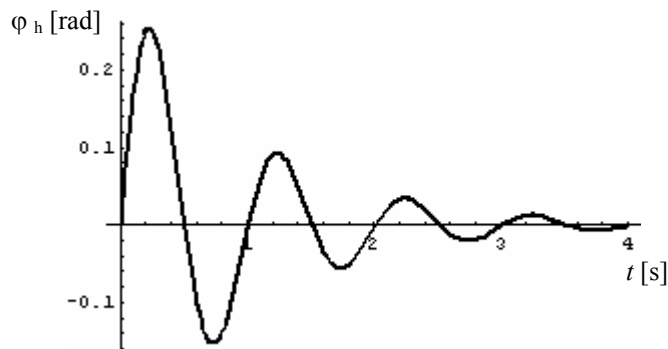
V nasledujúcej časti príspevku je ukázané riešenie vytvorenej lineárnej diferenciálnej rovnice druhého rádu s konštantnými koeficientami s pravou stranou pomocou softvéru Mathematica [4].

Pre konkrétne číselné údaje boli v danom programe vyjadrené riešenia pre (12), (15):

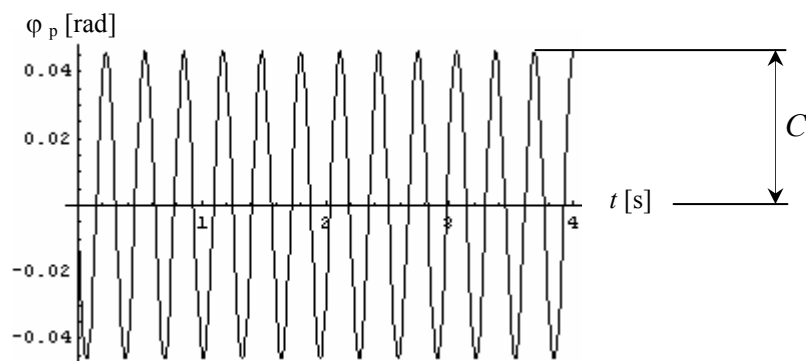
$$x_h(t) = e^{-1 \cdot t} [0 \cdot \cos(6,245 \cdot t) + 0,320256 \cdot \sin(6,245 \cdot t)] \quad (16)$$

$$x_p(t) = -0,0460131 \cdot \sin(20 \cdot t - (-0,110657)) \quad (17)$$

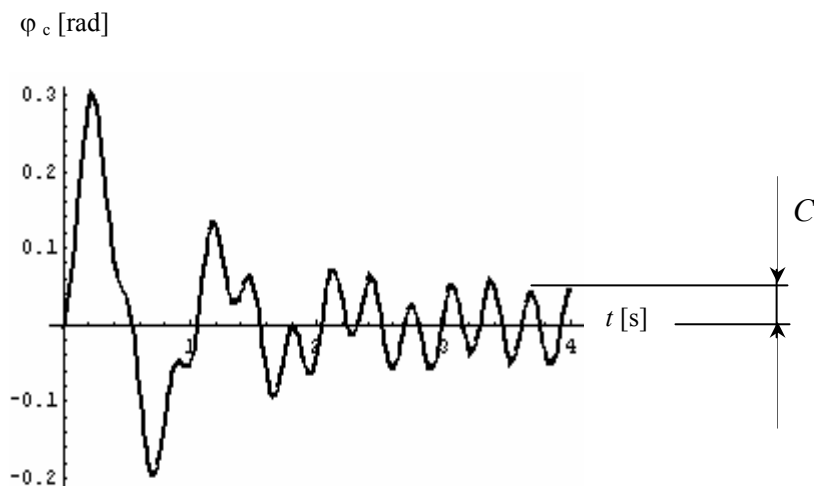
Jednotlivé časové priebehy riešení (12), (15) a (11) sú zobrazené na nasledovných obrázkoch.



Obr. 3: Časová závislosť natočenia tyče (riešenie homogénnej dif. rovnice) pri voľnom kmitaní.



Obr. 4: Časová závislosť natočenia tyče (partikulárne riešenie) pri vynútenom kmitaní s harmonickou budiacou silou s konštantnou amplitúdou.



Obr. 5: Časová závislosť natočenia tyče (celkové riešenie dif. rovnice) pri vynútenom kmitaní s harmonickou budiacou silou s konštantnou amplitúdou.

Z grafov vidíme, že riešenie homogénnej diferenciálnej rovnice s časom asymptoticky zaniká (obr.3). Tento člen nazývame prechodovým nestacionárnym členom všeobecného riešenia. Druhý člen je partikulárne riešenie, vyjadruje ustálené vynútené kmitanie sústavy (obr. 4) a predstavuje stacionárny člen všeobecného riešenia. Možno povedať, že po určitom čase sústava bude vykonávať prakticky len ustálené kmitanie s amplitúdou C a začiatočnou fázou φ .

Pre technickú prax majú význam mnohé ďalšie parametre, ktoré sa dajú zostaviť na základe daných podmienok. V príspevku sme chceli však poukázať len na základné riešenie jedného typu diferenciálnych rovníc, a to lineárnej diferenciálnej rovnice 2. rádu s konštantnými koeficientami s pravou stranou, resp. prezentovať ukážku aplikácie matematických poznatkov študentov v odborných predmetoch (konkrétne v dynamike).

4 Záver

Z analýzy danej úlohy vyplýva, že matematické vedomosti a zručnosti sú významnou a dôležitou súčasťou riešenia dynamických, ale vo všeobecnosti aj mechanických úloh. Študenti by sa v technických disciplínach mali zamýšľať hlavne nad technickými princípmi a význammi, matematický aparát by mal byť pre nich samozrejmosťou, rovnako samozrejmosťou by mala byť schopnosť výsledky získané matematickými metódami interpretovať v riešení konkrétneho technického problému.

Príspevok sa zaoberá jedným z veľkého počtu problémov dynamiky, pri analýze a riešení ktorého je nutné aplikovať získané poznatky z matematiky. Pre definovanú sústavu je zostavená lineárna diferenciálna rovnica 2. rádu s konštantnými koeficientami s pravou stranou a prevedené jej analytické a následne numerické riešenie. Pre názornosť sú časové závislosti natočenia tyče pri voľnom aj vynútenom kmitaní zostrojené do grafov.

Príspevok prezentuje jeden z mnohých príkladov dôležitého prepojenia a nadväznosti matematických predmetov s odbornými predmetmi pri štúdiu na vysokých školách technického zamerania.

PodĎakovanie

Autorky vyjadrujú poďakovanie VEGA MŠ SR za podporu projektu „Experimentálne a simulačné metódy dynamickej analýzy mechatronických subsystémov technologických zariadení“ - VEGA 1/0256/09.

5 Literatura

1. Naď, M., Labašová, E. *Mechanika tuhých telies. Návod na cvičenia*. 1. vyd. Trnava Vydavateľstvo: AlumiPress, 2008, 194 s., ISBN 978-80-8096-050-6
2. Naď, M.: *Structural dynamic modification of vibrating systems*. In: Applied and Computational Mechanics, Vol. 1, No. 1, 2007, pp. 203-214, ISSN 1802-680X
3. Halabrin M. a kol. *Lineárna algebra*. Bratislava, Vydavateľstvo STU, 2004, 170 str., ISBN:80-227-2275-8
4. Komorníková M., Mikula K. *Výpočtový systém Mathematica*. Bratislava, Vydavateľstvo STU, 1998, 198 str., ISBN:80-227-1123-3

Lektoroval: RNDr. Soňa Pavlíková, CSc. , Katedra informatiky, Fakulta mechatroniky, Trenčianska univerzita Alexandra Dubčeka v Trenčíne, SR

Kontaktná adresa:

Eva Labašová, Ing. Ph.D.,
ÚVSM, Katedra aplikovanej mechaniky,
MfF STU, Paulínska 16, 917 24 Trnava, SR
tel. 00421 918 646 022
e-mail eva.labasova@stuba.sk

Jaroslava Trubenová, RNDr. PhD.,
Katedra aplikovanej matematiky,
FPV UCM Trnava,
Nám. Jozefa Herdu 2, 917 01 Trnava,
SR
e-mail jaroslava.trubenova@ucm.sk