

NÁHRADA NEHARMONICKÝCH PERIODICKÝCH SIGNÁLOV RADOM ROTUJÚCICH FÁZOROV

MILLY Miron, SR

Resumé

V príspevku sa vychádza z neharmonickej periodickej funkcie rozvinutej do komplexného tvaru Fourierovho radu s exponenciálnymi členmi. Jednotlivé harmonické zložky danej neharmonickej funkcie sú potom podľa pravidiel symbolicko-komplexnej metódy nahradzované príslušnými rotujúcimi fázormi.

Kľúčové slová: neharmonická, periodická, funkcia, fázor, Fourierov rad.

REPLACE OF INHARMONIC PERIODICAL SIGNALS WITH SERIES OF ROTATE PHASORS

Abstract

In the paper is outing from inharmonic periodical function, developed to the complex form of Fourier series with exponential elements. The individual harmonic components of inharmonic periodical function are then under the rule of symbolically-complex method substitute with corresponding pertinent rotate phasors.

Key words: inharmonic, periodical, function, phasor, Fourier series.

1 Úvod

Symbolicko-komplexná metóda má v teoretickej elektrotechnike, elektronike a rádiotechnike veľký praktický význam, pretože vzájomné zlučovanie (sčítavanie alebo odčítavanie), ako aj derivovanie a integrovanie dvoch alebo viacerých harmonických signálov (v podobe harmonických elektrických napätí alebo prúdov – ako funkcií času) sa podstatne zjednoduší, ak ich nahradíme príslušnými rotujúcimi časovými vektormi (*rotujúcimi fázormi*). Princíp náhrady danej harmonickej (napr. kosínusovej) funkcie času v jej explicitnom vyjadrení:

$$s(t) = S_m \cos(\omega_o t + \varphi) \quad (1)$$

príslušným rotujúcim fázorom vyjadreným v tvare:

$$\widehat{S}(t) = S_m e^{j(\omega_o t + \varphi)} = S_m e^{j\varphi} e^{j\omega_o t} = \widehat{S}_{m,\varphi} e^{j\omega_o t}, \quad \text{kde} \quad \widehat{S}_{m,\varphi} = S_m e^{j\varphi} \quad (2)$$

podľa formálneho matematického predpisu: $s(t) \longrightarrow \widehat{S}(t)$

musí spĺňať podmienku, ktorá je explicitne vyjadrená všeobecným vzorcom:

$$s(t) = \operatorname{Re}\{\widehat{S}_{m,\varphi} e^{j\omega_o t}\} = S_m \cos(\omega_o t + \varphi) \quad (3)$$

Prítom jednotlivé veličiny majú nasledujúci význam:

T je doba periódy harmonickej funkcie času $s(t)$,

f_o je opakovacia frekvencia harmonickej funkcie času $s(t)$, pričom $f_o = 1/T$,

ω_o je uhlová opakovacia frekvencia harmonickej funkcie $s(t)$, pričom $\omega_o = 2\pi f_o$,

φ je počiatočná fáza harmonickej funkcie času $s(t)$ vzhľadom k času $t = 0$,

S_m je veľkosť (amplitúda) harmonickej funkcie času $s(t)$,

$\hat{S}_{m,\varphi}$ je komplexná konštanta (fázor) harmonickej funkcie času $s(t)$,

$\hat{S}(t)$ je komplexná náhrada (rotujúci fázor) harmonickej funkcie času $s(t)$,

2 Fourierov rad a jeho aplikácia vo fázorovom počte

V odbornej literatúre (napr. v [1] alebo v [3]) je Fourierov rad vyjadrený ako súčet konštantnej zložky a nekonečného radu reálnych kosínusových a sínusových zložiek periodickej neharmonicko-periodickej funkcie času $s(t)$ v *klasickom tvare*:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)], \quad \text{kde } \omega_1 = 2\pi f_1, \quad (4)$$

$$\text{pričom: } \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos(n\omega_1 t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} s(\omega_1 t) \cos(n\omega_1 t) d(\omega_1 t) \quad (6)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(n\omega_1 t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} s(\omega_1 t) \sin(n\omega_1 t) d(\omega_1 t) \quad (7)$$

kde:

- T je doba periódy neharmonicko-periodickej funkcie $s(t)$, pričom $T = 1/f_o$,
- f_o je opakovacia frekvencia neharmonicko-periodickej funkcie času $s(t)$, pričom $f_o = f_1$,
- f_1 je frekvencia základnej (1.harmonickej) zložky neharmonicko-periodickej funkcie $s(t)$,
- ω_1 je uhlová frekvencia 1.harmonickej zložky neharmonicko-periodickej funkcie $s(t)$,
- n je rád n -tej harmonickej zložky neharmonicko-periodickej funkcie $s(t)$,
- $a_0/2$ je stredná hodnota neharmonicko-periodickej funkcie $s(t)$ za celú dobu periódy T ,
- a_n je koeficient kosínusového člena n -tej harmonickej zložky funkcie $s(t)$,
- b_n je koeficient sínusového člena n -tej harmonickej zložky funkcie $s(t)$,

Nakoľko v teoretickej elektrotechnike a rádioelektronike pri vyšetřovaní elektrických a elektronických obvodov využívame symbolicko-komplexnú metódu, pri ktorej časové priebehy elektrických napätí $u(t)$ a prúdov $i(t)$ nahrádzame príslušnými rotujúcimi fázormi $\hat{U}(t)$ a $\hat{I}(t)$, je celkom prirodzené, že pri Fourierovom rozvoji neharmonicko-časového priebehu danej periodickej funkcie bude oveľa výhodnejšie využiť *komplexný tvar* Fourierovho radu s exponenciálnymi členmi. Jeho odvodenie sa zakladá na platnosti známych Eulerových vzorcov:

$$e^{+jn\omega_1 t} = \cos(n\omega_1 t) + j \sin(n\omega_1 t) \quad (8)$$

$$e^{-jn\omega_1 t} = \cos(n\omega_1 t) - j \sin(n\omega_1 t) \quad (9)$$

Z nich pre funkcie $\cos(n\omega_1 t)$ a $\sin(n\omega_1 t)$ vyplýva:

$$\cos(n\omega_1 t) = \frac{1}{2} (e^{+jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t}), \quad \sin(n\omega_1 t) = \frac{-j}{2} (e^{+jn\omega_1 t} - e^{-jn\omega_1 t}) \quad (10)$$

Dosaďme ich do pôvodného (*klasického tvaru*) Fourierovho radu (4) a vyjadřime z neho časť pod sumou „ Σ “:

$$\left[a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t) \right] = \left[\frac{a_n - jb_n}{2} e^{+jn\omega_1 t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega_1 t} \right] = \left[\hat{S}_{+n} e^{+jn\omega_1 t} + \hat{S}_{-n} e^{-jn\omega_1 t} \right],$$

pričom sme označili komplexné konštanty:

$$\hat{S}_{+n} = \frac{a_n - jb_n}{2}, \quad \hat{S}_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}, \quad (11)$$

Z uvedeného je zrejmé, že koeficienty $\hat{S}_{+n}$ a $\hat{S}_{-n}$ sú navzájom *komplexne združené*, takže $\hat{S}_{-n} = \hat{S}_{+n}^*$. Pomocou nich možno Fourierov rad vyjadriť aj v *komplexnom tvare s exponenciálnymi členmi*:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\hat{S}_{+n} e^{+jn\omega_1 t} + \hat{S}_{-n} e^{-jn\omega_1 t} \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^{n=N} \hat{S}_n e^{+jn\omega_1 t} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{S}_n e^{+jn\omega_1 t} \quad (12)$$

kde $N = 0, 1, 2, 3, \dots$, pričom člen $a_0/2$ je obsiahnutý v sume ako člen S_0 pre $N = 0$.

Ďalej dosadíme do vyjadrení konštánt (11) vzťahy (6) a (7) pre výpočet reálnych koeficientov a_n , b_n , ktoré sú nám známe z klasického tvaru (4) Fourierovho radu:

$$\hat{S}_{+n} = \frac{1}{2} [a_n - jb_n] = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos(n\omega_1 t) dt - j \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(n\omega_1 t) dt \right] \quad (13)$$

Po dosadení a následnej úprave postupne dospejeme k vzťahom (14) a (15):

$$\hat{S}_{+n} = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) [\cos(n\omega_1 t) - j \sin(n\omega_1 t)] dt = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \quad (14)$$

$$\hat{S}_{-n} = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) [\cos(n\omega_1 t) + j \sin(n\omega_1 t)] dt = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) e^{+jn\omega_1 t} dt \quad (15)$$

Z vyjadrenia (12) je zrejmé, že funkcia $s(t)$ v skutočnosti predstavuje *vektorový súčet* fázora $\hat{S}_{-n}$ rotujúceho v *zápornom* (–) zmysle, a fázora $\hat{S}_{+n}$ rotujúceho v *kladnom* (+) zmysle otáčania. Preto funkciu $s(t)$ možno vyjadriť nasledujúcim spôsobom:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{S}_{+n} e^{+jn\omega_1 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{S}_{-n}^* e^{-jn\omega_1 t}, \quad \text{pričom } \hat{S}_{+n}^* = \hat{S}_{-n} \quad (16)$$

Časť $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{S}_{-n}^* e^{-jn\omega_1 t}$ výrazu (16) teda predstavuje súčet fázorov všetkých harmonických

zložiek rotujúcich v *zápornom* (–), teda v *opačnom zmysle* otáčania, než to požaduje *symbolicko-komplexná metóda*, a preto ak túto časť z uvedeného tvaru Fourierovho radu vynecháme, dostaneme hľadanú *komplexnú náhradu* obcej periodickej funkcie $s(t)$ v súlade so zásadami *symbolicko-komplexnej metódy*, pričom toto priradenie vyjadríme formálnym matematickým predpisom:

$$s(t) \longrightarrow \hat{S}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{S}_n e^{+jn\omega_1 t}, \quad (17)$$

$$\text{kde: } \hat{S}_n = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt, \quad \text{pričom } \hat{S}_0 = S_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt, \quad (18)$$

3 Záver

V tomto príspevku sme na základe teoretickej analýzy vzájomných súvislostí medzi *klasickým goniometrickým tvarom* Fourierovho radu s kosínusovými

a sínusovými členmi a *komplexným tvarom* Fourierovho radu s exponenciálnymi členmi poukázali na niektoré špecifické vlastnosti *komplexného tvaru* Fourierovho radu, ktoré zároveň ponúkajú možnosť konkrétnej realizácie formálneho matematického predpisu náhrady obecnej periodickej funkcie času nekonečným radom rotujúcich fázorov, a to v súlade so zásadami *symbolicko-komplexnej metódy*. Výsledkom týchto úvah vznikol exaktný matematický predpis náhrady obecnej periodickej funkcie času v podobe súčtu nekonečného počtu príslušných rotujúcich fázorov s n -násobkom základnej harmonickej zložky o frekvencii f_1 , ktorá sa rovná opakovacej frekvencii f_0 neharmonického periodického signálu.

4 Literatúra

- [1] Trnka, Z.: Teoretická elektrotechnika. SNTL/ALFA, Praha 1972.
- [2] Dufek, M. – Mikulec, M.: Příklady z teoretické elektrotechniky. SNTL/ALFA, Praha 1970.
- [3] Grega, M. – Kluvanec, D. – Rajčan, E.: Matematika pre fyzikov. SPN, Bratislava 1974.

Lektoroval: Ing. Milan Bernát, PhD.

Kontaktná adresa autora:

Miron Milly, Ing., CSc., Katedra fyziky FHPV PU,
080 01 Prešov, ul. 17. novembra č. 1,
e-mail: millymir@unipo.sk