

STOCHASTICKÉ METÓDY V POISTENÍ

URBANÍKOVÁ Marta, SK

Resumé

Cieľom článku je ukázať možnosti využitia stochastických metód v poistení. Ide o modely založené na pravdepodobnostnom rozdelení náhodnej premenej, ktorá predstavuje výšku škody pri nastatí poistnej udalosti. Využíva sa predovšetkým Logaritmickeo-normálne rozdelenie, Gama rozdelenie, Beta rozdelenie, Pareto rozdelenie and zložené Poissonovo rozdelenie. Tieto modely umožňujú efektívnu kalkuláciu rizikového poistného.

Kľúčové slová: poistenie, pravdepodobnostné rozdelenia, výška poistných plnení.

STOCHASTIC METHODS IN INSURANCE

Abstract

The contribution deals with the possibility of using the stochastic methods in insurance. The models are based on the probability distribution of a random variable representing the amount of claims. Particularly, Log-normal, Gama, Beta, Paret and compound Poisson distributions are used. These models allow for an effective calculation of a risk premium.

Key words: Insurance, Probability distributions, amount of claimsl.

1 Úvod

Pri výpočte poistného môžu byť použité dva prístupy: deterministický a stochastický. Pri stochastickom prístupe ide o pravdepodobnostné modely poistných javov. Tieto modely umožňujú nahradiť nedostatočný počet dát v prípade nedostatočnej predchádzajúcej evidencii dát, v prípade nových produktov, v začínajúcich poisťovniach a pod. Ďalšou výhodou tohto prístupu je, že často pomocou jednoduchých matematických vzťahov s malým počtom parametrov sa dá opísať chovanie rozsiahlych poistných kmeňov a dajú sa štatisticky testovať ich vlastnosti.

2 Modelovanie výšky škôd

Ide o modely vychádzajúce z pravdepodobnostného rozdelenia náhodnej premennej X , ktorá označuje výšku poistného plnenia zvyčajne na jednu poistnú udalosť. Rozdelenie náhodnej premennej je popísané pravdepodobnostnou hustotou $f(x)$. Najčastejšie využívané pravdepodobnostné rozdelenia sú predovšetkým:

(1) **Logaritmickeo-normálne rozdelenie** $X \sim LN(\mu\sigma^2)$. Je to dvojparametrické rozdelenie s $-\infty < \mu < \infty$ a $\sigma > 0$ s hustotou

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma \cdot x} \exp \left[-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right], x > 0,$$

Logaritmickeo-normálne rozdelenie možno použiť na modelovanie výšky škôd v úrazovom a havarijnom poistení, v poistení budov proti požiaru, proti víchriciam atď.

(2) **Gamma rozdelenie** $X \sim G(a, b)$. Je to dvojparametrické rozdelenie s $a > 0$ a $b > 0$ s hustotou

$$f(x) = \frac{a^b}{\Gamma(b)} x^{b-1} e^{-ax}, x \geq 0 \quad \left(\Gamma(b) = \int_0^\infty z^{b-1} e^{-z} dz \right) \text{ je tzv. gama funkcia,}$$

Špeciálne $G(\lambda, 1)$ je tzv. *exponenciálne rozdelenie* $\text{Exp}(\lambda)$ s parametrom $\lambda > 0$

(3) **Beta rozdelenie** $X \sim B(a, b)$. Je to trojparametrické rozdelenie s $a > 0$, $b > 0$ a $c > 0$ s hustotou:

$$f(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{c\Gamma(a)\Gamma(b)} \left(\frac{x}{c}\right)^{a-1} \left(1 - \frac{x}{c}\right)^{b-1}, 0 < x < c$$

Hustota v tvare „U“ typická pre rozdelenie s $a < 1$ a $b < 1$ sa dá využiť na modelovanie výšky škôd pri tých produktoch, kde často nastávajú buď veľmi malé alebo naopak veľmi veľké škody napr. v protipožiarnej poisťovni.

(4) **Pareto rozdelenie** $X \sim \text{Par}(a, b)$ Je to dvojparametrické rozdelenie s $a > 0$ a $b > 0$:

$$f(x) = \frac{b \cdot a^b}{x^{b+1}}, x \geq a,$$

Vzhľadom k „ťažkým koncom“ sa dá Pareto rozdelenie použiť v produktoch s odľahlými extrémnymi hodnotami škôd napr. v nemocenskej poisťovni, protipožiarnej poisťovni budov atď.

3 Aplikácie v praxi

V nasledujúcom príklade použijeme popísané rozdelenia na modelovanie výšky škôd.

Príklad: Tabuľka 1 obsahuje údaje o 96 poisťných plneniach. Uvedené dáta sú v desiatkach EUR. Vyberte najvhodnejšie pravdepodobnostné rozdelenie výšky poisťných plnení pri tomto produkte neživotného poistenia.

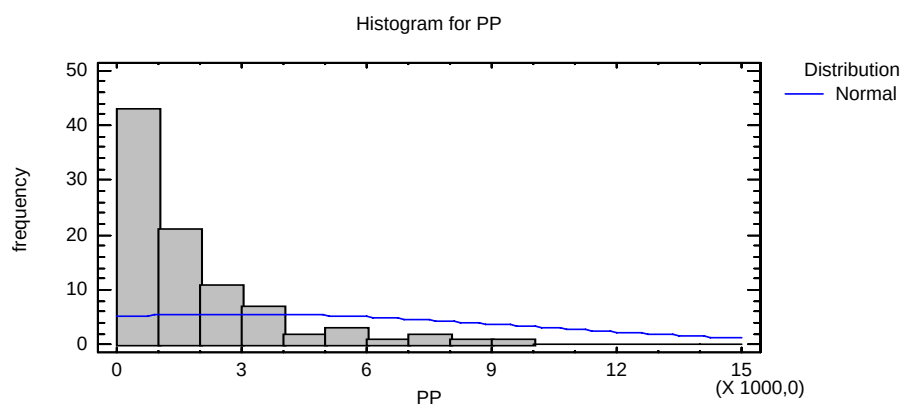
Tabuľka 1: Údaje o 96 poisťných plneniach.

24	300	594	1205	2030	3515
26	302	609	1262	2066	3531
73	329	671	1270	2240	4068
84	346	691	1351	2413	4527
87	359	716	1385	2421	5006
102	367	757	1498	2521	5065
115	375	821	1546	2586	5481
132	378	829	1565	2727	6046
159	384	885	1635	2797	7245
207	452	893	1671	2850	7477
240	475	968	1706	2989	8738
241	495	1003	1820	3110	9197
254	503	1053	1829	3166	16370
268	531	1081	1855	3383	17605
272	543	1083	1873	3443	25318
282	563	1150	1914	3512	58524

Při řešení použijeme statistický program STATGRAPHICS Centurion. Načítame dáta zoradené od najmenšieho po najväčšie. Použijeme procedúru Distribution Fitting, vyberieme Fitting Uncensored Data. Základné informácie o charakteristikách výberového súboru výšky poistných plnení môžeme vidieť na nasledujúcom výstupe

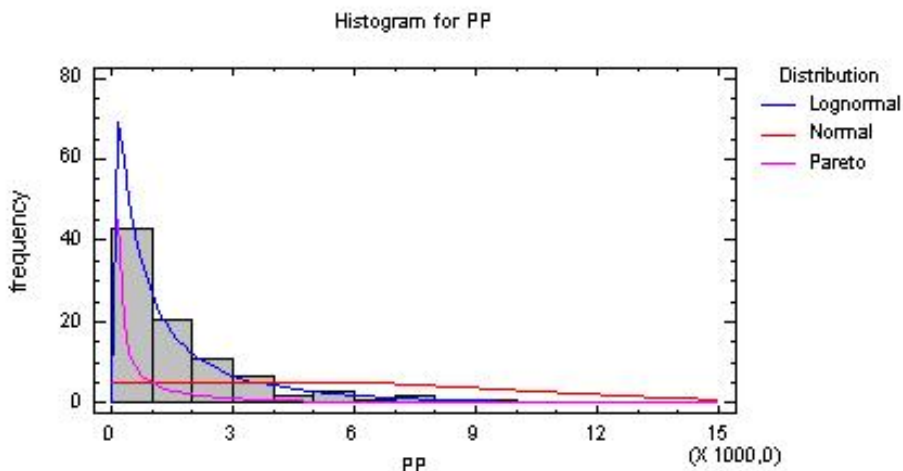
Tabuľka 2: Výpočty.

Count	96	Minimum	24,0
Average	2921,08	Maximum	58524,0
Median	1177,5	Range	58500,0
Variance	4,69064E7	Std. skewness	25,2525
Standard deviation	6848,82	Std. kurtosis	94,6586
Coeff. of variation	234,462%		



Obr. 1: Histogram rozdelenia výšky poistných plnení.

Z histogramu na obrázku 1 vidíme, že rozdelenie výšky škôd je pravostranne zošikmené, čo nás oprávňuje testovať niektoré z pravostranne zošikmených rozdelení pravdepodobnosti. Kliknutím pravého tlačidla myši sa nám ukáže možnosť vybrať funkciu Analysis Options, kde označíme na základe histogramu Paretovo, Normálne a Lognormálne rozdelenie.



Obr. 2: Aproximácie pravdepodobnostnými rozdeleniami.

Tabuľka 3: Základné údaje o vybraných rozdeleniach.

<i>Lognormal</i>	<i>Normal</i>	<i>Pareto</i>
mean = 2930,41	mean = 2921,08	shape = 0,143272
standard deviation = 7434,44	standard deviation = 6848,82	
Log scale: mean = 6,97971		
Log scale: std. dev. = 1,41647		

Tabuľka 3 nám poskytuje základné údaje o vybraných rozdeleniach. Na obrázku 2 je porovnanie aproximácie vybranými pravdepodobnostnými rozdeleniami. Vidíme, že Paretovo rozdelenie nedostatočne aproximuje rozdelenie výšky poistného plnenia už pri malých škodách. Najlepšie sa javí lognormálne rozdelenie so strednou hodnotou 2930,41 a smerodajnou odchýlkou 7434,44. Vhodnosť lognormálneho rozdelenia overíme testom dobrej zhody. V ponuke na pracovnej lište je ikonka Tables, po kliknutí sa otvorí okno s ponukou, kde zaznačíme Analysis Summary, Goodness-of-Fit Tests, Critical Values a Comparison of Alternative Distributions.

Tabuľka 4: χ^2 - test.

	<i>Lognormal</i>	<i>Normal</i>	<i>Pareto</i>
Chi-Squared	9,00023	393,5	313,418
D.f.	21	21	22
P-Value	0,989212	0,0	0,0

P-value menšie ako 0,05 indikujú, že dáta nepatria do daného pravdepodobnostného rozdelenia s pravdepodobnosťou 0,95. V tabuľke 4 vidíme, že χ^2 - test zamietol normálne a Paretovo rozdelenie a potvrdil vhodnosť aproximácie dát lognormálnym pravdepodobnostným rozdelením.

4 Záver

V súčasnosti sa čoraz viac diskutuje aj o použití stochastických metód pri výpočte rezerv. Základnou úlohou týchto metód je získanie variability odhadovaných rezerv, t.j. určenie štandardnej odchýlky a následné určenie intervalov spoľahlivosti pre odhadované rezervy. Modely, ktoré sa pri nich využívajú sú napr. Lognormálny, Overdispersed Poisson (ODP), Gamma, ale aj tzv. Mack model. ODP a Gamma model.

5 Literatúra

1. CIPRA, T.: Poistná matematika teorie praxe a praxe. Praha Ekopress, 1999. 398 s. ISBN 80-86119-17-3.
2. PACÁKOVÁ, V. : Aplikovaná poistná štatistika. Bratislava ELITA, 2000. 248 s. ISBN 80-8044-073-5.
3. URBANÍKOVÁ, M – VACULÍKOVÁ, L.: Aktuárska matematika. Bratislava STU, 2006. 186 s. ISBN 80-227-2442-4.

Lektoroval: Doc. RNDr. Marta Vrábelová, CSc .

Kontaktná adresa:

Doc. RNDr. Marta Urbaníková, CSc., ÚIAM MTF STU Hajdóczyho 1, 91724 Trnava,
SR e-mail: marta.urbanikova@stuba.sk