

APLIKÁCIA MATEMATIKY PRI RIEŠENÍ ÚLOH V TECHNICKÝCH PREDMETOCH

LABAŠOVÁ Eva – TRUBENOVÁ Jaroslava – LABAŠ Vladimír, SR

Resumé

Príspevok poukazuje na vzťah medzi matematickým aparátom a riešením vybraných úloh z fyziky a mechaniky tuhých a poddajných telies. Cieľom je ukázať medzipredmetovú prepojenosť, na ktorú sa pri parciálnej výučbe predmetov čiastočne zabúda. Uvádzané príklady sú typovými úlohami pre aplikovanie časti poznatkov z vysokoškolskej matematiky (derivácia funkcie jednej reálnej premennej) v odborných technických predmetoch.

Kľúčové slová: derivácia funkcie, kinematika bodu, ohybový moment, priečna sila.

THE APPLICATION OF MATHEMATICS AT PROBLEM SOLUTIONS IN TECHNICAL SUBJECTS

Abstract

The relationship between mathematics and solving selected problems in physics and mechanics of rigid and solid bodies is presented in this paper. Aim is to show the mutual connectivity among subjects, very often omitted in teaching of individual subjects. The typical problems of the special technical subjects - mechanics and physics, which require the application of the knowledge of higher mathematics (derivation of the functions of one real variable) are presented.

Key words: derivation of the function, kinematics of point, bending moment, transverse force.

1 Úvod

Matematika zaujíma špecifické postavenie na fakultách technických univerzít. Vytvára základ pre ďalšie vzdelávanie v prírodných vedách, najmä fyziky, ale aj v technických disciplínach ako sú mechanika tuhých a poddajných telies, hydromechanika a termomechanika. Pred učiteľmi matematiky stojí neustále zodpovedná úloha: vyučovať matematiku v súlade s požiadavkami, ktoré sú na tento predmet kladené a zohľadniť aj hlavné postuláty strategického programu vo výchovno-vzdelávacej oblasti [1].

Od Bolonského procesu vystupuje do popredia trend posilňovať aplikačné príklady, experimentálne a realizačné výstupy. Obsah predmetov matematiky (matematika I, matematika II) zodpovedá témam, ktoré študenti potrebujú v technických predmetoch. Na aplikačných príkladoch v matematike by si mali študenti uvedomiť, že matematika, ktorú sa učia je pre nich skutočne potrebná a užitočná, čím by sa pravdepodobne zmenil aj ich postoj k nej. V tejto súvislosti by malo nastať posilnenie medzi predmetových vzťahov. Toto nie je možné dosiahnuť bez spolupráce učiteľov matematiky s učiteľmi odborných predmetov [1].

Príspevok je zameraný na vypíchnutie niektorých jednoduchých aplikácií matematického aparátu vo vzťahu k iným predmetom. Pozornosť je venovaná tematickému celku z matematiky *derivácia funkcie jednej reálnej premennej* [2] a jeho uplatneniu v predmetoch *fyzika, mechanika tuhých telies (časť - kinematika) a v pružnosti a pevnosti*.

2 Ukážka z fyziky

Fyzikálne vzdelanie tvorí súčasť každého technického vzdelania. Fyzikálny spôsob myslenia je základom správnej formulácie technického problému, jeho riešenia, ale i správneho výkladu výsledkov získaných v bežnej technickej praxi [3]. Derivácia a integrál, to sú matematické pojmy, operácie, ktoré majú v matematike, fyzike, mechanike významné a nezastupiteľné postavenie. Prvá aplikačná ukážka sa preto orientuje na fyzikálny popis pohybu hmotného bodu po priamke.

Príklad: Aký pohyb z hľadiska kinematického popisuje rovnica $v = 5t^2 + 2t - 3$, kde v je hodnota rýchlosti a t je čas pohybu častice pohybujúcej sa pozdĺž priamky. Koeficienty 5, 2, 3 na pravej strane rovnice majú samozrejme príslušné jednotky [3].

Riešenie: Častica sa pohybuje pozdĺž priamky a preto pohyb častice je priamočiary. Ako je zrejmé zo zadania hodnota rýchlosti sa v čase mení. To znamená, že častica sa nepohybuje rovnomerným pohybom. Pre rovnomerný pohyb je totiž hodnota rýchlosti konštantná.

Z definície pre zrýchlenie a dostaneme: $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(5t^2 + 2t - 3)}{dt} = 10t + 2$, Výsledok po

derivovaní ukazuje, že zrýchlenie s časom rovnomerne rastie a je kladné. To znamená, že ak by zrýchlenie malo konštantnú nenulovú hodnotu išlo by o rovnomerne zrýchlený pohyb.

Dôsledok: Derivácia funkcie $f(x)$ v bode A (bod A je určený hodnotou x_1) predstavuje smernicu dotýčnice prechádzajúcej týmto bodom. Hodnota derivácie je sa teda čo do veľkosti rovná hodnote tangensu uhla α , ktorý zvierajú dotýčnica s kladným smerom x -ovej osi. (Obr.1)

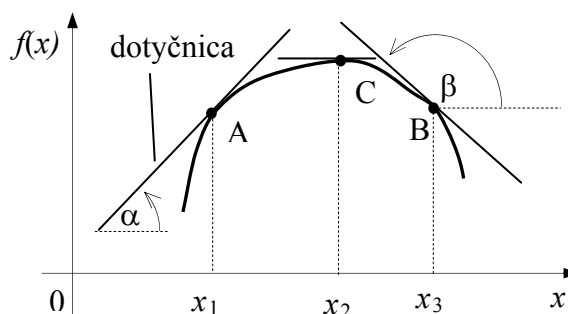
Ak by sme súradnicu x nahradili časom t a funkciu $f(x)$ polohou bodu v závislosti na čase $x(t)$ znamienko rýchlosti zistíme tak, že spravíme dotýčnicu v danom časovom okamihu ku krivke ($x_1 \rightarrow t_1, x_2 \rightarrow t_2$).

V polohe x_1 (bod A) je smernica dotýčnice kladná a to znamená, že derivácia x -ovej súradnice podľa času je kladná, veľkosť rýchlosti je kladná. V bode

C je smernica nulová, derivácia x -ovej súradnice nadobúda nulovú hodnotu, resp. rýchlosť bodu je nulová. V bode B je smernica dotýčnice záporná, čiže aj rýchlosť je záporná. Ďalej ak poznáme graf rýchlosti ako funkcie času, vieme na základe smernice dotýčnice povedať aké je zrýchlenie bodu v danom časovom okamihu. Podobne sa postupuje i pri popise pohybu po kružnici, kde sa stanovuje pomocou derivácií uhlová rýchlosť a uhlové zrýchlenie z časovej závislosti uhla.

V mechanike, časti dynamika je ústrednou veličinou sila, ktorá podľa druhého Newtonovho zákona je prvou deriváciou hybnosti podľa času. Takto by sme mohli prejsť celou fyzikou, mechanikou tuhých telies a našli by sme veľké množstvo vzťahov medzi veličinami (často definičných vzťahov), v ktorých vystupuje derivácia podľa času.

Derivácia sa samozrejme objavuje pri popise mnohých ďalších, niekedy i menej názorných fyzikálnych zákonitostí a veličín (napríklad vzťah medzi silou a potenciálnou energiou, vzťah medzi intenzitou a potenciálom poľa, tangenciálne napätie viskózne kvapaliny, entropia, tepelný tok, tepelné kapacity a pod.).



Obr. 1

Význam derivácie z grafického hľadiska sa uplatňuje aj v predmete *Pružnosť a pevnosť*, ktorý sa či už s týmto alebo podobným názvom vyučuje na technických univerzitách. Ukážeme v nasledovnej časti jeden typický príklad z tejto oblasti

3 Ukážka z predmetu Pružnosť a pevnosť

Obtiažnosť tohto predmetu je spôsobená nielen nutnosťou ďalšieho rozvíjania abstrakcie a problémového riešenia úloh, ale aj priamou a bezprostrednou nadväznosťou na statiku – časť mechaniky tuhých telies, matematiku a náuku o materiáli.

Druhá aplikačná ukážka v tomto príspevku sa bude vzťahovať na problém vnútorných silových účinkoch v priamych nosníkoch pri rovinnom ohybe. V dôsledku posuvných a otáčavých účinkov síl vo vyšetrovanom vnútornom priereze nosníka vo všeobecnosti vznikajú dve vnútorné veličiny: – posúvajúca (pričná) sila $T(x)$ a ohybový moment $M_o(x)$. Medzi vnútornými silovými veličinami pri ohybe platia diferenciálne závislosti, známe ako Schwedler - Žuravského závislosti:

$$T(x) = \frac{dM_o(x)}{dx}; \quad q(x) = -\frac{dT(x)}{dx}; \quad q(x) = -\frac{d^2M_o(x)}{dx^2},$$

kde $q(x)$ je intenzita spojitého zaťaženia (spojité zaťaženie) nosníka. Pre úseky merané sprava je potrebné znamienko v daných závislostiach zmeniť na opačné.

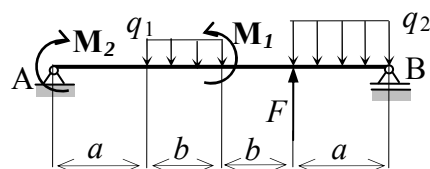
Príklad: Nosník na dvoch podperách je podľa Obr. 3a zaťažený silou F , ohybovými momentami M_1 , M_2 a spojitými zaťažienami q_1 , q_2 . Úlohou bude určiť priebeh pričnej sily a ohybového momentu v ľubovoľnom priereze nosníka.

Riešenie: Z momentových podmienok rovnováhy pre uvoľnené teleso (učivo statiky) sa vypočítajú väzbové reakcie $R_{Ax} = 0$, $R_{Ay} = R_A$, R_B ; Obr.3b.

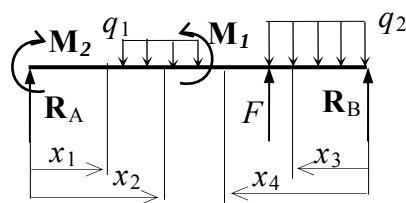
Myslenými rezní rozdelíme nosník na 4 úseky, podľa pravidiel pružnosti v nich určíme priebeh ohybových momentov a pričných síl, Obr.3b.

1.úsek	$0 \leq x_1 \leq a; \quad M_o(x_1) = M_2 + R_A x_1; \quad T(x_1) = R_A$
2.úsek	$a \leq x_2 \leq a + b; \quad M_o(x_2) = M_2 + R_A x_2 - q_1 \frac{(x_2 - a)^2}{2};$ $T(x_2) = R_A - q_1(x_2 - a)$
3.úsek	$0 \leq x_3 \leq a; \quad M_o(x_3) = R_B x_3 - q_2 \frac{x_3^2}{2}$ $T(x_3) = -R_B + q_2 x_3$
4.úsek	$a \leq x_4 \leq a + b; \quad M_o(x_4) = R_B x_4 + F(x_4 - a) - q_2 a(x_4 - \frac{a}{2});$ $T(x_4) = -R_B - F + q_2 a$

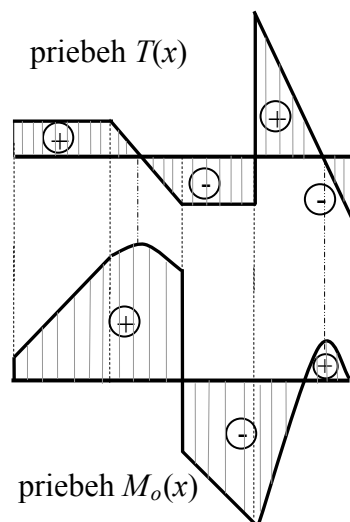
Na Obr. 3c je zakreslený priebeh vnútorných veličín. Náčrt priebehov ohybových momentov



Obr. 3a



Obr. 3b



Obr. 3c

a priečných síl je veľmi názorným grafickým zobrazením derivácie funkcie jednej reálnej premennej. Vzhľadom na cieľ príspevku chceme poukázať na základné dôsledky vyplývajúce zo závislosti $T(x) = \frac{dM_o(x)}{dx}$:

- Priečna sila sa čo do veľkosti rovná tangensu uhla medzi dotyčnicou k priebehu ohybového momentu v skúmanom reze a osou x (os nosníka).
- V prípade, že spojité zaťaženie je definované polynómom, priečna sila je definovaná polynomicou funkciou o jeden rád vyššou a ohybový moment je o dva rády vyššou funkciou ako je spojité zaťaženie.
- V reze nosníka, v ktorom má priečna sila nulovú hodnotu, má ohybový moment extrémnu hodnotu. V danom reze nastáva zlom ohybového momentu, v zmysle zmeny znamienka.
- Tam kde ohybový moment v úseku narastá je priečna sila kladná, kde priebeh ohybového momentu klesá je priečna sila záporná (pri pohľade zľava).

Pri zostrojovaní priebehu ohybového momentu v úsekoch nosníka kde pôsobí spojité zaťaženie sa derivácia využíva tiež pri hľadaní polohy a hodnoty lokálneho minima, resp. maxima.

4 Záver

V príspevku je poukázané na dôležitosť uvedomovania si medzi-predmetových vzťahov, čo by malo umožniť študentom ľahšie zvládnuť i náročnejšie predmety vysokoškolského štúdia na technických univerzitách či vysokých školách. Správne vyžívanie medzipredmetových vzťahov môže študentovi pomôcť hlbšie a dôslednejšie pochopiť študované javy a zákonitosti. Je preto na pedagógoch, aby hľadali informácie i z iných odborov a v čo najväčšej možnej miere pri vysvetľovaní problematiky poukazovali na možné prepojenie a súvislosti s inými predmetmi. Ako názorná ukážka boli v príspevku urobené dva príklady, jeden z predmetu Fyzika druhý z predmetu Pružnosť a pevnosť. Už pri vysvetľovaní derivácie funkcie jednej premennej v predmete Matematika možno efektívne poukázať na aplikovateľnosť tejto operácie. Správne a primerané využívanie medzipredmetových vzťahov môže byť pre študentov aj spestrením pri preberaní častokrát náročného učiva.

6 Literatúra

1. VAGASKÁ, A. *Niektoré aspekty medzipredmetových vzťahov matematiky a mechaniky*. Dostupné na: <http://math.ku.sk/data/konferenciasub/pdf2003/Vagaska.pdf2>.
2. HALABRÍN, M. a kol. *Lineárna algebra*. 1. vyd. Bratislava: Vydavateľstvo STU v Bratislave, 2004, 170 s. ISBN 80-227-2126-3.
3. LABAŠ, V. – MINÁRIK, S.- KUBLIHA, M. *Technická fyzika – testy*. 1. vyd. Bratislava: Vydavateľstvo STU v Bratislave, 2000, 291 s. ISBN 80-227-2242-1.

Lektoroval: RNDr. Soňa Pavlíková, CSc. (Trenčianska univerzita A. Dubčeka)

Kontaktná adresa

Eva Labašová, Ing. PhD.
ÚVSM, MfF STU v Trnave
Pavlínska 16, 917 24 Trnava, SR
e-mail: eva.labasova@stuba.sk

Jaroslava Trubenová, RNDr. CSc.
KAMI, FPV UCM v Trnave
Nám. J. Herdu 2, 917 01 Trnava,
jaroslava.trubenova@ucm.sk

Vladimír Labaš, Doc. RNDr. CSc.
KF, PdF KU Ružomberok
Hrabovská cesta 1,
034 01 Ružomberok, SR
vladimir.labas@ku.sk