

UPLATNENIE ŠTATISTICKÝCH ROZDELENÍ VO VÝROBNOM INŽINIERSTVE

MAJERČÁK Jozef, SR

Resumé

V tomto príspevku sú uvedené základné informácie o niektorých typoch štatistických rozdelení. Sú zamerané na výrobné inžinierstvo, ako aj na technickú prax.

Kľúčové slová: náhodná premenná, náhodné javy pokusy, diskrétna náhodná premenná, spojitá náhodná premenná, normálne (binomické, geometrické) rozdelenie.

APPLICATION STATISTICAL DISTRIBUTION ON MANUFACTURING ENGINEERING

Abstract

The paper deals with the basic knowledge about some statistical distributions. Generally, normal distribution is the fundament of statistical distributions. There are shown examples, which are focus on manufacturing engineering and technical practice.

Key words: stochastic variable, stochastic experiment, discrete stochastic variable continuous stochastic variables, normal distribution, binomial distribution, geometric distribution.

1 Úvod

Štatistické rozdelenia patria medzi najdôležitejšie pojmy štatistiky pravdepodobnosti náhodných veličín. Nimi sa riadi veľké množstvo štatistických javov, ktoré za istých podmienok dobre aproximujú spojitú aj diskrétnu veličinu. V tomto príspevku sa budeme zaoberať uplatnením niektorých druhov štatistických rozdelení vo výrobnom inžinierstve.

2 Štatistické rozdelenia vo výrobnom inžinierstve

Štatistické rozdelenia môžeme vhodne využiť v týchto etapách výrobného procesu:

2.1 Pri kontrole rozmerov a tvaru súčiastky

Operáciou, ktorá sprevádza všetky účelové technologické procesy je kontrola, či dosahovaný rozmer, alebo tvar súčiastky odpovedá údajom na výkrese. [1]

Dodržanie presnosti výroby a jej kontroly má najmä tieto dôvody:

- Vzájomná vymeniteľnosť súčiastok, montáž súčiastky s protikusom,
- unifikácia súčiastok, opakovateľnosť jej tvarov, napr. z estetických dôvodov.

2.2 Pri montáži súčiastky

Montážou nazývame súbor činností ľudí, strojov a zariadení, ktorých vykonaním v stanovenom poradí a čase vznikne z jednotlivých súčiastok a montážnych celkov hotový výrobok. [1] K spajovaniu sa používajú rôzne technologické metódy. Nás bude zaujímať presnosť montáže z hľadiska rozmerov súčiastok a ich výrobných tolerancií.

2.3 Pri ďalších fázach výroby

– optimalizácia technologických procesov, výroba súčiastok, chyby merania atď.

3 Prehľad niektorých typov rozdelení

3.1 rozdelenia diskkrétnej náhodnej premennej (nespojité) [3]

3.1.1 Binomické rozdelenie (výber s vrátením) – platí pre n nezávislých pokusov, jav A nastáva s pravdepodobnosťou $0 < p < 1$, ktorá je daná vzťahom:

$$\mu = n \cdot p \wedge \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p) \Rightarrow P(X = x) = \binom{n}{x} p^x \cdot (1 - p)^{n - x} \quad \dots(1)$$

3.1.2 Geometrické rozdelenie (výber bez vrátenia) – vychádza z nezávislých Bernoulliho pokusov, pri n pokusoch nastane jav práve x – krát a pravdepodobnosť je daná vzťahom:

$$\mu = \frac{1 - p}{p} \wedge \sigma^2 = \frac{1 - p}{p^2} \Rightarrow P(X = x) = p \cdot (1 - p)^x, \dots, m = 0, 1, 2, \dots \quad \dots (2)$$

3.1.3 Poissonovo rozdelenie (náhodné javy v časovom intervale) – Diskrétna veličina X má Poissonovo rozdelenie vtedy, ak rozdelenie pravdepodobnosti je dané vzťahom:

$$\mu = n \cdot p = \lambda \wedge \sigma^2 = \lambda \Rightarrow P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda} \quad \dots(3)$$

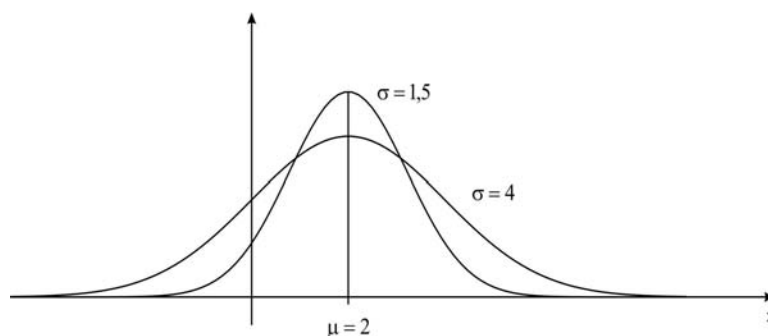
3.2 rozdelenia spojitej náhodnej premennej

3.2.1 Normálne rozdelenie

Gaussovo rozdelenie – Náhodná premenná X má normálne rozdelenie, ak jej funkcia hustoty je daná vzťahom:

$$\mu \in R \wedge \sigma^2 > 0 \Rightarrow P(X = x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in R$$

Normálne rozdelenie je najpoužívanejšie štatistické rozdelenie. Graf je symetrický podľa jeho osi v bode μ , má dva inflexné body $\mu \pm \sigma$ a obojstrannú asymptotu $y = 0$.



Obr. 1: Graf normálneho rozdelenia pre $\mu = 2$ a $\sigma = 1,5$, resp. $\sigma = 4$.

3.2.2 t-rozdelenie (Studentovo rozdelenie)

Anglický štatistik W. S. Gosset (Student) zistil, že pre t-rozdelenie pravdepodobnosti s ν stupňami voľnosti ($\nu \geq 1$), platí:

$$\mu = 0 \text{ (pre } \nu > 1) \wedge \sigma^2 = \frac{\nu}{\nu - 2} \text{ (pre } \nu > 2) \Rightarrow P(X = x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\pi\nu}} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

3.2.3 $\chi^2[\nu]$ – (chí) kvadrat rozdelenie

Náhodná premenná X má χ^2 rozdelenie s ν stupňami voľnosti ($\nu \geq 1$), ak pre jej hustotu rozdelenia platí :

$$\chi^2 \text{ (pre } \nu \geq 1) \Rightarrow P(X = x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)2^{\frac{\nu}{2}}} \cdot x^{\frac{\nu}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \text{ pre } x > 0 \text{ a } f(x) = 0$$

4 Štyri aplikácie z výrobného inžinierstva

Aplikácia 1 Nech 70% súčiastok na sklade má kvalitu Q a zvyšok má normálnu kvalitu K . Náhodne vyberieme 5 súčiastok. Aká je pravdepodobnosť, že

- tri súčiastky budú mať kvalitu Q ?
- väčšina (menšina) súčiastok bude mať kvalitu Q ?

Riešenie

$$a) P(X_5 = 3) = \binom{5}{3} 0,7^3 \cdot 0,3^2 = 10 \cdot 0,343 \cdot 0,09 = \mathbf{0,30870}$$

$$b) P(X_5 \geq 3) = P(X_5 = 3) + P(X_5 = 4) + P(X_5 = 5) = 0,30870 + 0,36015 + 0,16807 = \mathbf{0,83692}$$

$$(P(X_5 \leq 2) = 1 - P(X_5 \geq 3) = 1 - 0,83692 = \mathbf{0,16308})$$

Aplikácia 2 Pri kontrole tesnosti blokov valcov motora sme zistili, že 2 % blokov valcov je netesných a prepúšťajú mazivo. Zistíme pravdepodobnosť, že medzi 100 náhodne vybranými blokmi valcov budú najviac štyri netesniace.

Riešenie

Predpokladáme, že počet blokov valcov, ktoré netesnia má štatistické rozdelenie Poissonovho typu. Pravdepodobnosť týchto javov vypočítame takto:

$$\mu = n \cdot p = 100 \cdot 0,02 = \lambda = 2 \wedge \sigma^2 = \lambda = 2 \Rightarrow P(X \leq 4) = \sum_{x=0}^4 \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}$$

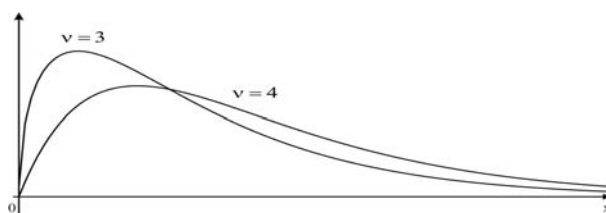
V tabuľke pre Poissonovo rozdelenie nájdeme pre $\lambda = 2$ príslušné hodnoty:

$$P(x \leq 4) = P(x = 0) + P(x = 1) + \dots + P(x = 4) = 0,135335 + 0,270671 + \dots + 0,090224 = \mathbf{0,9497348} \Rightarrow P(x \leq 4) = 94,97348\%$$

Aplikácia 3 Kvalita vyrobených súčiastok predstavuje grafy hustoty χ^2 -rozdelenia, a to pre dve hodnoty stupňov voľnosti $\nu = 3$, aj $\nu = 4$ a kritickú hodnotu χ^2 -rozdelenia v intervale $\alpha \in (0,1) \Rightarrow \chi^2(\alpha)$. Zobrazte oba grafy hustoty χ^2 -rozdelenia.

Riešenie

- 1) Grafy chí kvadrat rozdelenia zostrojíme s dvomi stupňami voľnosti $\nu = 3, \nu = 4$
- 2) Pre kritickú hodnotu chí-kvadrat rozdelenia platí vzťah: $P(X > \chi^2(\alpha)) = \alpha$



Obr. 2: Grafy chí-kvadrat rozdelenia so stupňami voľnosti $\nu = 3, \nu = 4$.

Aplikácia 4 Výrobok vyhovuje norme, ak jeho hmotnosť je z intervalu 68 až 69 gr. Vieme, že hmotnosť daných výrobkov má normálne rozdelenie so strednou hodnotou $\mu = 68,3$ a disperziou $\sigma^2 = 0,04$. Aká je pravdepodobnosť, že vybraný výrobok bude vyhovujúci?

Riešenie

Nech X je náhodná premenná pre hmotnosť daných výrobkov. Hľadáme pravdepodobnosť:

$$P(68 < Z < 69) = P(-1,5 < Y < 3,5) = \Phi(3,5) - [1 - \Phi(1,5)] = 0,999767 - 0,066807 = \mathbf{0,93296}$$

5 Záver

V tomto príspevku sme analyzovali a aplikovali niektoré typy štatistických rozdelení. Ukázali sme, že výrobné inžinierstvo je vhodnou možnosťou pre ich uplatnenie.

Poznámka: Príspevok bol vypracovaný s grantovou podporou VEGA č. 1/0345/08: Modelovanie a simulácia mechatronických systémov pre strojárstvo.

6 Literatúra

1. VASILKO, K., NOVÁK–MARCINČIN, J., HAVRILA, M.: Výrobné inžinierstvo, Prešov, FVT TUKE, 2003, s. 423.
1. HRUBINA, K. a kol.: Riešené úlohy algoritmami numerických metód s podporou PC, Informatech Košice, 2002, 236 strán.
2. ŠEBEJ, P.: Štatistika – vybrané časti. Informatech Ltd Košice, Prešov, FVT TUKE, 2001, s. 241.

Lektoroval: Doc. Ing. Anna Jadlovská, PhD., Technická univerzita Košice, Fakulta elektrotechniky a informatiky. Katedra kybernetiky a umelej inteligencie. Letná 9, 040 01 Košice, SR, Tel. 055 0903 496 663. e-mail anna.jadlovska@tuke.sk