

ZOVŠEOBECNENÁ KONVERGENCIA RADOV

MASÁROVÁ Renáta, SR

Resumé

Práca sumarizuje základné výsledky o prerovnaníach a zmenách znamienok v číselných radoch a radoch v Banachových priestoroch.

Kľúčová slova: rad, zachovávanie konverencie, prerovnanie, Banachov priestor.

GENERALIZED CONVERGENCE OF SERIES

Abstract

This article summarizes the fundamental results about rearrangements and changes of signs in number series and series in Banach spaces.

Key words: serie, convergence preserving, rearrangement, Banach space.

1 Úvod

Problematika nekonečných číselných radov tvorila vždy jeden zo základných stavebných pilierov matematiky. Prvé výpočty určitého integrálu (v tých časoch nazývané kvadratury), pochádzajúce od Archimeda, počítali určitý integrál ako súčet nekonečného radu. Pri skúmaní tejto problematiky vyvstane veľmi jednoduchá otázka: Platí aj pre sčítovanie nekonečného počtu čísel komutatívny zákon? Ako sa správa rad, v ktorom pri niektorých členoch zmeníme znamienka? V tejto práci zhrniem niektoré známe výsledky z tejto oblasti pre číselné rady a porovnam ich s najnovšími poznatkami z radov v Banachových priestoroch.

2 Číselné rady

2.1 Absolútne konvergentné číselné rady

Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ je pevne zvolený konvergentný rad s kladnými členmi, ktorého súčet je A . Výraz $R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$ nazývame zvyškom po n -tom člene radu.

Budeme sa zaoberať prerovnaniami tohto radu a znamienkovými zmenami v ňom.

Označme znakom $P = \{\pi(n), n \in N\}$ množinu všetkých permutácií prirodzených čísel. Zo základov matematickej analýzy je známe, že ak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ je konvergentný rad s kladnými členmi, potom je aj absolútne konvergentný. Každé jeho prerovnanie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ je tiež konvergentné a má ten istý súčet A .

Všimnime si, ako vyzerajú znamienkové zmeny v tomto rade. Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je pevne zvolený rad s kladnými členmi ktorého súčet je A . Znakom $CPS(a_1, a_2, \dots)$ označme množinu všetkých postupností $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\varepsilon_n = \pm 1$, pre ktoré rad $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$ konverguje a $CPS = \bigcap CPS(a_1, a_2, \dots)$. Je zrejmé, že v tomto prípade $CPS(a_1, a_2, \dots)$ aj CPS obsahuje všetky postupnosti $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Pri znamienkových zmenách sa však už nezachováva súčet radu. Ak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, potom $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)a_n = -A$. Označme znakom $W(a_1, a_2, \dots)$ množinu všetkých súčtov všetkých radov $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$, kde $\varepsilon_n = 1$ alebo -1 a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je pevne zvolený rad s kladnými členmi.

V práci [9] je dokázané, že množina $W(a_1, a_2, \dots)$ je symetrická perfektná množina.

Ak pre každé prirodzené n platí $a_n \leq R_n$, potom $W(a_1, a_2, \dots) = \langle -A, A \rangle$ [8].

Naproti tomu ak pre všetky prirodzené n platí $a_n > R_n$, tak už množina $W(a_1, a_2, \dots)$ nevypĺňa celý interval $\langle -A, A \rangle$. V tomto prípade je prirodzené položiť si otázku, ako to vyzerá s mierou tejto množiny. Odpoveď na ňu nájdeme v práci [9] – mierou množiny $W(a_1, a_2, \dots)$ je v tomto prípade $\mu(W) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{n+1} R_n$.

2.2 Neabsolútne konvergentné číselné rady

Prerovnanie konvergentného radu nemusí byť tiež konvergentné. Permutácie, ktoré zachovávajú konvergenciu každého neabsolútne konvergentného radu, charakterizoval P. A. B. Pleasant [7] nasledovne:

Permutácia $\pi(n)$ zachováva konvergenciu každého neabsolútne konvergentného radu vtedy a len vtedy, ak existuje také prirodzené číslo M , že pre každé $n \in \mathbb{N}$ sa množina $\{\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)\}$ dá vyjadriť ako zjednotenie nie viac ako M blokov prirodzených čísel.

Permutácia, ktorá zachováva konvergenciu každého neabsolútne konvergentného radu, zachováva už aj jeho súčet [5].

Všimnime si, ako sa správajú znamienkové zmeny pre neabsolútne konvergentný rad. Množina $CPS(a_1, a_2, \dots)$, resp. CPS už nie je priestor všetkých postupností čísel ± 1 . Charakterizácia postupností, ktoré zachovávajú konvergenciu každého neabsolútne konvergentného radu, je analogická ako pre permutácie. Postupnosť $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ patrí do

množiny CPS vtedy a len vtedy, ak existuje také prirodzené číslo M , že postupnosť $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots$ pozostáva z nie viac ako M blokov konštánt [2].

3 Rady v Banachových priestoroch

Konvergenci radov v Banachových priestoroch je venovaná monografia [4].

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sa nazýva bezpodmienečne konvergentný, ak je konvergentné každé prerovnanie jeho členov $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$.

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ prvkov z Banachovho priestoru sa nazýva perfektne konvergentný, ak konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$, kde $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ľubovoľná postupnosť čísel ± 1 .

Tak ako pre číselné rady, aj tu je zrejmé analógia radov, ktorých každé prerovnanie konverguje a radov, ktoré konvergujú pre každú zmenu znamienok.

Pre ľubovoľný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ prvkov z Banachovho priestoru sú nasledujúce podmienky ekvivalentné:

- 1) rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje bezpodmienečne
- 2) všetky podrady $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = a_{n_1} + a_{n_2} + \dots + a_{n_k} + \dots$, kde $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$

radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sú konvergentné

- 3) rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje perfektne.

O tom, že aj v týchto radoch je pri zachovávaní konverencie a zmenách znamienok členov radu dôležitá absolútna konvergencia, hovoria posledné dve vety.

V konečnodimenziálnom normovanom priestore X je každý bezpodmienečne konvergentný rad absolútne konvergentný.

Nech X je banachov priestor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je bezpodmienečne konvergentný rad. Potom množina všetkých súčtov radov $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$, kde $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ľubovoľná postupnosť čísel ± 1 , je kompaktná množina v X . (Gel'fand's).

3 Záver

Tento článok podáva prehľadné zhrnutie základných výsledkov o prerovnovaniach a znamienkových zmenách v rôznych typoch radov. Ďalšie výsledky, popisujúce napr. topologickú štruktúru množín $W(a_1, a_2, \dots)$, $CPS(a_1, a_2, \dots)$ a CPS možno nájsť v prácach [1], [3], [6].

4 Literatúra

- [1] AGNEW, R. P. On rearrangements of series, Bull. Amer. Math. Soc. 46 (1940), 797-799.
- [2] BHATTCHARYYA, S., LAHIRI, B. On subseries of series, Indian J. Math. 18 (1976), 91-93.
- [3] ČERVEŇANSKÝ, J., ŠALÁT, T. Convergence preserving permutations of $\mathbb{N}$ and Fréchet's space of permutations of $\mathbb{N}$, Math. Slov., 49(1999), No.2., 189-199.
- [4] KADETS, M. I., KADETS, V. M. Series in Banach Spaces, Birkhäuser Verlag, Berlin, 1997.
- [5] LEGEŇ, A., ŠALÁT, T. O nekotorych primeneniach metoda kategorij v teorii prostranstv posledovatel'nostej, Mat.-fyz. čas. SAV 14 (1964), 217-233.
- [6] MASÁROVÁ, R. Transformácie množiny súčtov nekonečných konvergentných radov s kladnými členmi, ACTA Fac. Paed. Univ. Tyrnaviensis, Pdf TU Trnava, (2001), 55-61.
- [7] PLEASANTS, P. A. B. Rearrangements that preserve convergence, J. London Math. Soc. (2) 15 (1977), 134-142.
- [8] SENGUPTA, H. M. Rearrangements of series, Proc. Amer. Math. Soc. 7 (1956), 347-350.
- [9] ŠALÁT, T. O istých vlastnostiach radov s kladnými členmi, Acta. fac. rerum natur. univ. com., Mathematica II (1957), 71-75.

Lektoroval: Soňa, Pavlíková, RNDr.CSc.

Kontaktní adresa:

Renáta Masárová, RNDr. PhD., Paulínska 16, Trnava, 917 24, renata.masarova@stuba.sk
Tento článok je súčasťou grantu VEGA 1/0582/08