

POZNÁMKA K VYUŽITÍ NORMY GRADIENTU

ABAS Marcel, SR

Resumé

V prípade že gradient funkcie je v nejakom bode nenulový vektor, tak tento vektor určuje smer najväčšieho prírastku funkcie v tomto bode. V príspevku ukážeme, ako sa dá tento smer určiť aj v prípade že gradient je nulový vektor a to iba s pomocou vedomostí ktoré už študenti pri výučbe skalárnych a vektorových polí získali.

Kľúčové slová: gradient, norma vektora, smer najväčšieho prírastku.

A NOTE ABOUT THE NORM OF GRADIENT

Abstract

If the gradient of a function is non-zero in a point, it can be interpreted as the direction in which the function changes most quickly. In this contribution we show that there is a possibility to establish the direction even if the gradient is zero and that this can be done with knowledge which students have at their stage of study.

Key words: gradient, norm of vector, the direction of the maximum rate of change.

1 Úvod

Nech je daná funkcia $f(x, y)$ dvoch premenných a nech $A = [a_x, a_y]$ je nejaký bod ležiaci v definičnom obore tejto funkcie. Nech funkcia $f(x, y)$ má v nejakom okolí bodu A parciálne derivácie podľa oboch premenných a nech $\vec{l} = (l_x, l_y)$ je nejaký nenulový vektor umiestnený v bode A . Potom číslo

$$\frac{df(a_x, a_y)}{d\vec{l}} = \frac{\partial f(a_x, a_y)}{\partial x} l_x^0 + \frac{\partial f(a_x, a_y)}{\partial y} l_y^0 \quad (1)$$

sa nazýva *derivácia funkcie f v bode A smere vektora $\vec{l}$* , pričom $\vec{l}^0 = (l_x^0, l_y^0)$ je jednotkový vektor v smere vektora $\vec{l}$, čiže $\vec{l}^0 = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}$. Rovnica (1) sa dá prepísať do tvaru

$$\frac{df(a_x, a_y)}{d\vec{l}} = \left(\frac{\partial f(a_x, a_y)}{\partial x}, \frac{\partial f(a_x, a_y)}{\partial y} \right) \cdot (l_x^0, l_y^0) \quad (2)$$

pričom $\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \vec{j}$ je *gradient* funkcie f a označujeme ho $\text{grad}(f)$. Využitím definície skalárneho súčinu vektorov, zistíme, že ak v bode A platí že $\text{grad}(f(A)) \neq \vec{0}$, tak gradient určuje smer najväčšieho prírastku funkcie v tomto bode.

2 Určenie smeru najväčšieho prírastku pomocou gradientu

Príklad: Vypočítajte smer najväčšieho prírastku funkcie $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ v bode $A = [1; 0]$ a v bode $B = [0; \frac{1}{2}]$.

Riešenie: Vieme, že ak je gradient danej funkcie v bodoch A a B nenulový, bude rovný práve smeru najväčšieho prírastku funkcie $f(x, y)$ v týchto bodoch.

Počítajme: $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2x$ a $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 8y$. Platí teda, že $\text{grad}(f(A)) = 2\vec{i} = (2; 0) \neq \vec{0}$

a $\text{grad}(f(B)) = 4\vec{j} = (0; 4) \neq \vec{0}$. Smer najväčšieho prírastku funkcie $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ v bode $A = [1; 0]$ je teda vektor $(2; 0)$ a v bode $B = [0; \frac{1}{2}]$ je to vektor $(0; 4)$.

Funkcia $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ je veľmi jednoduchá – ak ju prepíšeme do tvaru

$f(x, y) = \frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{(\frac{1}{2})^2}$ vidíme, že sa jedná o eliptický paraboloid s „vrcholom“ v bode $[0; 0; 0]$.

Body $A' = [1; 0; 1]$ a $B' = [0; \frac{1}{2}; 1]$ sa teda nachádzajú na tomto elipsoide vo výške 1. V oboch prípadoch ležia gradienty (smery najväčšieho prírastku funkcie) na polpriamkach s počiatkom v bode $[0; 0]$ – smer $\text{grad}(f(A))$ je totožný so smerom vektora $[0; 0] - [1; 0]$ a smer $\text{grad}(f(B))$ je totožný so smerom vektora $[0; 0] - [0; \frac{1}{2}]$.

3 Určenie smeru najväčšieho prírastku pomocou normy gradientu

Príklad: Vypočítajte smer najväčšieho prírastku funkcie $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ v bode $C = [0; 0]$.

Riešenie: Z predchádzajúceho príkladu vieme že $\text{grad}(f(x, y)) = 2x\vec{i} + 8y\vec{j}$ a preto v bode $C = [0; 0]$ platí že $\text{grad}(f(C)) = (0; 0) = \vec{0}$. To znamená že gradient teraz nemôžeme interpretovať ako smer najväčšieho prírastku funkcie a tento smer teda musíme určiť inak. Môžeme postupovať pomocou nasledovnej úvahy. Nech

$C(\varepsilon, \alpha) = [c_x + \varepsilon \cos \alpha; c_y + \varepsilon \sin \alpha]$, $\varepsilon > 0$, $\alpha \in \langle 0; 2\pi \rangle$ sú body z okolia bodu C – sú to body na kružnici o polomere $\varepsilon > 0$ so stredom v bode C . Ľahko zistíme, že pre $\varepsilon > 0$ je $\text{grad}(f(C(\varepsilon, \alpha))) = 2\varepsilon \cos \alpha \vec{i} + 8\varepsilon \sin \alpha \vec{j}$ nenulový. Ako ale zistiť, pre ktorý uhol α bude tento vektor maximálny? Zostrojíme funkciu $g(\varepsilon, \alpha)$ (ktorá bude samozrejme závisieť aj od funkcie f a od polohy bodu C), ako normu gradientu funkcie f v bode (bodoch) $C(\varepsilon, \alpha)$.

Je zrejmé že pre pevné $\varepsilon > 0$ bude smer najväčšieho prírastku funkcie totožný s uhlom α pre ktorý funkcia $g(\varepsilon, \alpha)$ nadobúda lokálny extrém (maximum). V našom prípade

$g(\varepsilon, \alpha) = \sqrt{4\varepsilon^2 \cos^2 \alpha + 64\varepsilon^2 \sin^2 \alpha} = 2\varepsilon \sqrt{\cos^2 \alpha + 16 \sin^2 \alpha} = 2\varepsilon \sqrt{1 + 15 \sin^2 \alpha}$. Pretože

$\frac{\partial g(\varepsilon, \alpha)}{\partial \alpha} = 2\varepsilon \cdot \frac{1}{2} \frac{30 \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{1 + 15 \sin^2 \alpha}}$ funkcia $g(\varepsilon, \alpha)$ bude pre pevné $\varepsilon > 0$ nadobúdať lokálne

maximum pre $\alpha = \frac{\pi}{2}$ a $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ (pre $\alpha = 0$ a $\alpha = \pi$ nadobúda funkcia lokálne minimum).

Ak sa teraz ε bude blížiť k nule vidíme, že smer najväčšieho prírastku funkcie $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ v bode $C = [0; 0]$ budú vektory $(0; 1)$ a $(0; -1)$. Keďže vieme, že

funkcia $f(x, y)$ je vlastne eliptický paraboloid v ktorého rezových rovinách $z = k$ vznikajú elipsy s kratšou poloosou ležiacou na osi O_y , výsledok bol očakávaný.

4 Záver

V článku sme si ukázali, ako je možné, pomocou pomerne elementárnych úvah a vedomostí ktoré študenti na ich stupni štúdia majú, vypočítať smer najväčšieho prírastku funkcie aj v prípade že to pomocou bežnej metódy nie je možné.

Literatúra

- [1] Kluvánek I., Mišík L., Švec M.: Matematika pre štúdium technických vied, I. diel, 2. prepracované vydanie, Bratislava, SVTL, 1965
- [1] Kluvánek I., Mišík L., Švec M.: Matematika pre štúdium technických vied, II. diel, 2. prepracované vydanie, Bratislava, SVTL, 1965

Lektoroval: RNDr. Soňa Pavlíková, CSc.

Kontaktná adresa:

Marcel Abas, RNDr. PhD., Department of Mathematics,
Institute of Applied Informatics, Automation and Mathematics,
Faculty of Materials Science and Technology in Trnava,
Slovak University of Technology Bratislava,
Hajdóczyho 1, 917 24 Trnava
tel.: 00421918646021, e-mail: abas@stuba.sk