TRANSFORMÁCIE TROJNÝCH INTEGRÁLOV

LIŠKA Vladimír, SR

Resumé

Substitučná metóda do viacrozmerných integrálov je účinným nástrojom pre ich výpočet, ale jej rutinná aplikácia môže viesť ku zdĺhavým výpočtom. Túto skutočnosť prezentujeme na príklade trojného integrálu, kde elementárnou oblasťou je kužeľ s osou súmernosti o_z.

Klíčová slova: trojný integrál, Fubiniho veta, cylindrické súradnice.

TRANSFORMATION THREE-DIMENSIONAL INTEGRALS

Abstract

Substitution Method to multidimensional integrals is a powerful tool for calculating them, but its routine application can lead to lengthy calculations. This fact presents the example of three-dimensional integral, where the fundamental field is cone with its axis of symmetry o_z.

Key words: three-dimensional integral, Theorem of Fubini, cylindrical coordinates.

Úvod

Článok poukazuje na skutočnosť, že vhodné využitie transformácie v trojných integrálov môže veľmi významne zjednodušiť výpočet. Túto skutočnosť sa pokúsime ukázať na konkrétnom príklade, kde je zreteľný rozdiel v zložitosti výpočtu použitím transformácie do cylindrických súradníc a výpočtu v karteziánskych súradniciach.

Príklad: Vypočítajte integrál $\iiint\limits_D z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, ak množina D je daná nerovnosťami $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}, z \leq 1$.

1 Riešenie transformáciou do cylindrických súradníc

Transformačné rovnice zobrazenia do cylindrických súradníc:

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = u$$

Množina D je použitím tejto transformácie obrazom množiny D^* danej nerovnosťami

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 1, \rho \leq u \leq 1$$

Toto zobrazenie je prosté a regulárne a funkcia $f(x, y, z) = z^2$ je spojitá a teda integrovateľná na množine D^*. Potom platí

$$\iiint\limits_D z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{D^*} u^2 \rho \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\rho \mathrm{d}u = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \rho \mathrm{d}\rho \int_\rho^1 u^2 \mathrm{d}u = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \rho - \rho^4 \mathrm{d}\rho = \frac{1}{10}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{5}$$

2 Riešenie v karteziánskych súradniciach

Množina D je elementárna oblasť typu $[x, y, z]$ daná nerovnosťami:

$$-1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1$$

Funkcia $f(x, y, z) = z^2$ je spojitá na merateľnej množine D a teda je tam integrovateľná. Teda platí

$$\iiint_D z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 4\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 z^2 \mathrm{d}z = \frac{4}{3}\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 1-\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y =$$

$$\frac{4}{3}\left(\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 1\mathrm{d}y - \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\right) = \frac{4}{3}\left(I_1 - I_2\right).$$

Najskôr vypočítame integrál I_1 použitím substitučnej metódy

$$I_1 = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 1\mathrm{d}y = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \left| \begin{matrix} x = \sin t \\ \mathrm{d}x = \cos t\mathrm{d}t \end{matrix} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sqrt{1-\cos 2t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$$

Integrál I_2 môžeme napísať v tvare

$$I_2 = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{\left(\mathrm{x}^2+y^2\right)^2}{\sqrt{\mathrm{x}^2+y^2}}\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{\sqrt{\mathrm{x}^2+y^2}}\mathrm{d}y .$$

Integrovanie podľa premennej y budeme realizovať metódou neurčitých koeficientov. Teda

$$\int \frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{\sqrt{\mathrm{x}^2+y^2}}\mathrm{d}y = \left(Ay^3+By^2+Cy+D\right)\sqrt{x^2+y^2} + k\int \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}y .$$

Aby sme určili koeficienty A, B, C, D, túto rovnosť derivujeme

$$\frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{\sqrt{\mathrm{x}^2+y^2}} = \left(3Ay^2+2By+C\right)\sqrt{x^2+y^2} + \left(Ay^3+By^2+Cy+D\right)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}} .$$

Po úpravách dostávame

$$x^4+2x^2y^2+y^4 = 3Ax^2y^2+2Bx^2y+Cx^2+3Ay^4+2By^3+Cy^2+Ay^4+By^3+Cy^2+Dy+k$$

Odtiaľ porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách dostaneme

$$4A=1, 3B=0, 3Ax^2+2C=2x^2, 2Bx^2+D=0, Cx^2+k=x^4 .$$

Riešením systému je $A=\frac{1}{4}, B=0, C=\frac{5}{8}x^2, D=0, k=\frac{3}{8}x^4$.

Potom pre I_2 dostávame

$$I_2 = \int_0^1 \left[\left(\frac{1}{4}y^3+\frac{5}{8}x^2y\right)\sqrt{x^2+y^2} + \frac{3}{8}x^4\ln\left|y+\sqrt{x^2+y^2}\right|\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x =$$

.

$$\frac{1}{8}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\left(2+3x^2\right)\mathrm{d}x + \frac{3}{8}\int_0^1 x^2\ln\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)\mathrm{d}x - \frac{3}{8}\int_0^1 x^4\ln x\mathrm{d}x = \frac{1}{8}I_{21} + \frac{3}{8}I_{22} - \frac{3}{8}I_{23}$$

Integrál I_{21} riešime substitučnou metódou

$$I_{21} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\left(2+3x^2\right)\mathrm{d}x \left| \begin{matrix} x = \sin t \\ \mathrm{d}x = \cos t\mathrm{d}t \end{matrix} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\left(2+3\sin^2 t\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 t + \frac{3}{4}\sin^2 2t\mathrm{d}t$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1+\cos 2t + \frac{3}{8}\left(1-\cos 4t\right)\mathrm{d}t = \frac{11}{16}\pi .$$

Integrál I_{22} najskôr upravíme použitím metódy per partes na tvar

$$I_{22}=\int_0^1 x^2\ln\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)dx\left|\begin{array}{ll} u=\ln\left(\sqrt{1-x^2}+1\right) & u'=\dfrac{-x}{\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)\sqrt{1-x^2}} \\ v'=x^4 & v=\dfrac{x^5}{5}\end{array}\right|=\frac{1}{5}\int_0^1\frac{x^6}{\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Využitím substitučnej metódy dostávame

$$I_{22}=\left|\begin{array}{l} x=\sin(2\operatorname{arctg}t) \\ \mathrm{d}x=\cos(2\operatorname{arctg}t)\dfrac{2}{t^2+1}\mathrm{d}t \\ t=\operatorname{tg}\dfrac{\arcsin x}{2}\end{array}\right|=\frac{1}{5}\int_0^1\frac{\sin^6 2\operatorname{arctg}t}{\left(\sqrt{1-\sin^2 2\operatorname{arctg}t}+1\right)\sqrt{1-\sin^2 2\operatorname{arctg}t}}\cos 2\operatorname{arctg}t\,\frac{2}{t^2+1}\mathrm{d}t=$$

$$\frac{1}{5}\int_0^1\frac{\left(\sin^2 2\operatorname{arctg}t\right)^3}{\cos 2\operatorname{arctg}t+1}\,\frac{2}{t^2+1}\mathrm{d}t=...=\frac{64}{5}\int_0^1\frac{\left(\dfrac{t^2}{t^2+1}\right)\left(\dfrac{1}{t^2+1}\right)^2}{t^2+1}\mathrm{d}t=\frac{64}{5}\int_0^1\frac{t^6}{\left(t^2+1\right)^6}\mathrm{d}t.$$

Funkciu $f(t)=\dfrac{t^6}{\left(t^2+1\right)^6}$ rozložíme na elementárne zlomky

$$\frac{t^6}{\left(t^2+1\right)^6}=\frac{At+B}{t^2+1}+\frac{Ct+D}{\left(t^2+1\right)^2}+\frac{Et+F}{\left(t^2+1\right)^3}+\frac{Gt+H}{\left(t^2+1\right)^4}+\frac{It+J}{\left(t^2+1\right)^5}+\frac{Kt+L}{\left(t^2+1\right)^6}.$$

Konštanty $A,B,C...,L$ vypočítame metódou neurčitých koeficientov, teda dostávame

$$\frac{t^6}{\left(t^2+1\right)^6}=\frac{1}{\left(t^2+1\right)^3}+\frac{-3}{\left(t^2+1\right)^4}+\frac{3}{\left(t^2+1\right)^5}+\frac{-1}{\left(t^2+1\right)^6}.$$

$$\frac{64}{5}\int_0^1\frac{t^6}{\left(t^2+1\right)^6}\mathrm{d}t=\frac{64}{5}\left(-\int_0^1\frac{1}{\left(t^2+1\right)^6}\mathrm{d}t+3\int_0^1\frac{1}{\left(t^2+1\right)^5}\mathrm{d}t-3\int_0^1\frac{1}{\left(t^2+1\right)^4}\mathrm{d}t+\int_0^1\frac{1}{\left(t^2+1\right)^3}\mathrm{d}t\right)=$$

$$\frac{64}{5}\left(-J_1+3J_2-3J_3+J_4\right).$$

Integrály J_1, J_2, J_3, J_4 vypočítame rekurentným vzorcom

$$I_n=\int\frac{1}{\left(x^2+1\right)^n}\mathrm{d}x\Rightarrow I_{n+1}=\frac{1}{2n}\frac{x}{\left(x^2+1\right)^n}+\frac{2n-1}{2n}I_n$$

$$J_4=\frac{1}{16}+\frac{3}{4}\int_0^1\frac{1}{\left(t^2+1\right)^2}\mathrm{d}t=...=\frac{1}{4}+\frac{3\pi}{32}$$

$$J_3=\frac{1}{48}+\frac{5}{6}\int_0^1\frac{1}{\left(t^2+1\right)^3}\mathrm{d}t=\frac{1}{48}+\frac{5}{6}\left(\frac{1}{4}+\frac{3\pi}{32}\right)$$

$$J_2=\frac{1}{128}+\frac{7}{8}\int_0^1\frac{1}{\left(t^2+1\right)^4}\mathrm{d}t=...=\frac{10}{384}+\frac{35}{48}\left(\frac{1}{4}+\frac{3\pi}{32}\right)$$

$$J_1 = \frac{1}{320} + \frac{9}{10}\int_0^1 \frac{1}{\left(t^2+1\right)^5}\mathrm{d}t = \ldots = \frac{102}{3840} + \frac{315}{480}\left(\frac{1}{4} + \frac{3\pi}{32}\right).$$

Potom

$$I_{22} = \frac{64}{5}\left(-\frac{7}{640} + \frac{1}{32}\left(\frac{1}{4} + \frac{3\pi}{32}\right)\right) = -\frac{1}{25} + \frac{3\pi}{80}.$$

Pre integrál I_2 platí

$$I_2 = \frac{1}{8}\frac{11}{16}\pi + \frac{3}{8}\left(-\frac{1}{25} + \frac{3\pi}{80}\right) - \frac{3}{8}\left(-\frac{1}{25}\right) = \frac{\pi}{10}$$

Potom pre I platí

$$I = \frac{4}{3}\left(I_1 - I_2\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{10}\right) = \frac{\pi}{5}.$$

Záver

Samotná rovnosť výsledkov dokazuje, že oba spôsoby výpočtu príkladu sú korektné. Dosť značný rozdiel je však v náročnosti riešenia. Preto je nutné vychádzať zo špecifík každého konkrétneho príkladu a ak je to možné uľahčiť si výpočet použitím transformácie, na čo je potrebné poukázať aj v samotnej didaktickej praxi.

Literatúra

1. BARTSCH, H.J. *Matematické vzorce.* 1. vyd. Praha: SNTL – Nakladatelství technické literatury, n. p., 1983. 832 p.
2. Ivan, J.: Matematika 1. Alfa – SNTL, Bratislava – Praha 1986.
3. KLUVÁNEK, I. – MIŠÍK, L. – ŠVEC, M. *Matematika II.* 1. vyd. Bratislava: Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, n. p., 1961. 856 p.

Lektoroval: Jaroslava Trubenová, RNDr. PhD

Kontaktní adresa:

Vladimír Liška, Mgr.,
Ústav aplikovanej informatiky, automatizácie a matematiky,
Materiálovotechnologická fakulta STU
Hajdóczyho 1, 917 24 Trnava, SR, tel.
00421 918 646 021, fax 00421 335 447 736,
e-mail vladimir.liska@stuba.sk