

POZNÁMKY KU NIEKTORÝM ZÁKLADNÝM VLASTNOSTIAM FUNKCIÍ

MASÁROVÁ Renáta, SR

Resumé

Článok ukazuje možné postupy pri definovaní monotónnych, resp. konvexných a konkávných funkcií. Poukazuje na najčastejšie chyby a mylné predstavy, ktoré pri nich majú študenti technických fakúlt. Sú v ňom tiež uvedené možné rozšírenia tejto problematiky.

Kľúčové slová: monotónna funkcia, rastúca a konvexná funkcia.

THE NOTES ABOUT SOME BASE PROPERTIES OF FUNCTIONS

Abstract

The article describes possible techniques of defining monotone, possibly convex and concave functions. It points out the most repeated errors and erroneous notion, which are made by students of technical schools. It includes possible extension of this area too.

Key words: monotone function, increasing convex function.

Úvod

Súčasťou každého základného kurzu z matematiky na vysokých školách je vyšetrovanie základných vlastností funkcií. Niektoré z nich sa dajú definovať rôznymi spôsobmi a je na prednášajúcom, ktorý typ definície vyberie. V práci sú opísané skúsenosti s niektorými z nich na vysokej škole technického zamerania.

1 Monotónne funkcie

Monotónne funkcie sa najčastejšie definujú nasledovne:

Definícia 1a. Funkciu $f(x)$ nazývame rastúcou (klesajúcou) na intervale $I \subset D(f)$, ak pre ľubovoľné dva body $x_1, x_2 \in I$ také, že $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Presnejší názov týchto funkcií by bol ostro rastúca, resp. ostro klesajúca. V prípade, že platí $f(x_1) \leq f(x_2)$, resp. $f(x_1) \geq f(x_2)$, funkcia sa nazýva neklesajúca, resp. nerastúca na intervale.

Ďalej sa budeme zaoberať iba rastúcimi funkciami. Pre ostatné typy monotónnych funkcií by sme mohli postupovať analogicky. Ekvivalentnou definíciou k definícii 1a. je nasledujúca:

Definícia 1b. Funkciu $f: R \rightarrow R$ nazývame rastúcou v bode $x_0 \in R$, ak existuje také $\varepsilon > 0$, že pre všetky $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ a $y \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ platí $f(x) < f(x_0) < f(y)$. Funkciu $f: I \rightarrow R$ nazývame rastúcou na intervale I , ak je rastúca v každom bode $x_0 \in I$.

Túto definíciu môžeme nájsť v knihe [3], ale ekvivalentná s ňou sa nachádza aj v učebnici [2].

Je zrejmé, že ak je funkcia rastúca na otvorenom intervale $I = (a, b)$, tak je rastúca v každom bode $x \in I$ (pre uzavretý interval sa v koncových bodoch berie iba pravé, resp. ľavé okolie bodu). Naopak to však neplatí. Ak je funkcia rastúca v bode $x_0 \in R$, nemusí existovať

žiadne také $\varepsilon > 0$, aby bola funkcia rastúca na intervale $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Takúto funkciu uvedieme v nasledujúcom príklade.

Príklad 1. Nech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je definovaná nasledovne:

$$f(x) = \begin{cases} -x & x \in (-\infty, 0) \\ 3 & x = 0 \\ 5 - x & x \in (0, \infty) \end{cases}$$

Táto funkcia je rastúca v bode 0. Ak vezmeme napríklad $\varepsilon = \frac{1}{10}$, potom pre ľubovoľné $x \in \left(-\frac{1}{10}, 0\right)$ a pre ľubovoľné $y \in \left(0, \frac{1}{10}\right)$ platí $f(x) < f(0) = 3 < f(y)$. Ale táto funkcia nie je rastúca na žiadnom intervale (práve naopak, vieme nájsť iba intervaly, na ktorých je táto funkcia klesajúca).

Pre študentov je, podľa môjho názoru, zrozumiteľnejšia definícia 1a. Pojem funkcie rastúcej v bode situáciu zbytočne komplikuje. Zvádza k domnienke, že ak funkcia rastie v bode, rastie aj v nejakom jeho okolí, čo však platí iba pre spojité funkcie.

Pri nespojitých funkciách je potrebné upozorniť študentov na jednu často sa vyskytujúcu chybu: Ak je funkcia rastúca na nejakých intervaloch I_1, I_2 , nemôžeme automaticky (bez ďalších úvah) napísať, že je rastúca na množine $I_1 \cup I_2$. Problém môžeme vysvetliť napríklad takto:

Príklad 2. Nájdite intervaly monotónnosti funkcií $f: y = x^3$ a $g: y = \frac{1}{x}$.

Pre funkciu f dostaneme: $y' = 3x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Pretože $D(f) = \mathbb{R}$ a $\forall x \in \mathbb{R}: f'(x) \geq 0$, pričom rovnosť nule nastane len v jednom bode, funkcia $f(x)$ je rastúca na celom $\mathbb{R}$.

Podobne pre funkciu $g: y' = -\frac{1}{x^2} < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Ale $D(g) = \mathbb{R} - \{0\}$, táto funkcia je klesajúca na intervaloch $(-\infty, 0)$ aj $(0, \infty)$, na množine $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ však klesajúca nie je (častá, hoci nesprávna odpoveď študentov je, že táto funkcia je klesajúca na celom svojom definičnom obore). Vezmime z definičného oboru napríklad body $x_1 = -1, x_2 = 1, x_1 < x_2$ ale $g(x_1) = -1, g(x_2) = 1$ a teda $g(x_1) < g(x_2)$, t. j. funkcia $g(x)$ nemôže byť klesajúca na $D(g)$.

Ďalším mylným predpokladom niektorých študentov je, že monotónna funkcia musí byť diferencovateľná. To však neplatí (stačí si vziať funkciu $y = \sqrt[3]{x}$). O vzťahu medzi monotónnosťou a diferencovateľnosťou hovorí

Veta (Lebesgue) Každá monotónna funkcia $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovateľná na $\langle a, b \rangle$ skoro všade (t. j. až na množinu miery nula). [3]

Hoci veta nepatrí do osnov technických fakúlt, je dobré jej tvrdenie uviesť aspoň v poznámke a v zjednodušenom tvare.

Monotónna funkcia nemusí byť ani spojitá, môže mať spočítateľne veľa bodov nespojitosti (napríklad schodovitá funkcia).

Poznámka. Názvy jednotlivých typov monotónnych funkcií, ktoré sú zaužívané v našich učebniciach, nemusia používať všetci autori. Je vhodné študentov upozorniť, že sa v literatúre môžu stretnúť aj s iným názvoslovím. Napríklad v knihe [3] sa používajú nasledujúce definície:

Nech $X \subset \mathbb{R}$. Funkcia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ sa nazýva
neklesajúca, ak pre $x_1 \leq x_2$ platí $f(x_1) \leq f(x_2)$
ostro neklesajúca, ak pre $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$
nerastúca, ak pre $x_1 \leq x_2$ platí $f(x_1) \geq f(x_2)$
ostro nerastúca, ak pre $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) > f(x_2)$
pre všetky $x_1, x_2 \in X$.

2 Konvexné a konkávne funkcie

Táto časť je venovaná tzv. typom vypuklosti funkcie – konvexnosti a konkávnosti. Všetky úvahy budeme robiť iba pre konvexnú funkciu, pre konkávne funkcie by sme postupovali analogicky.

Používa sa jedna z nasledujúcich definícií:

Definícia 2a. Nech I je ľubovoľný interval na ktorom je definovaná funkcia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Funkciu $f(x)$ nazývame konvexnou na intervale I , ak pre všetky $x, y \in I$ také, že $x < y$ a pre $0 \leq \lambda \leq 1$ platí $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$. [3]

Definícia 2b. Nech I je ľubovoľný interval na ktorom je definovaná funkcia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Funkciu $f(x)$ nazývame konvexnou na intervale I , ak pre ľubovoľné tri body z intervalu I ktoré spĺňajú podmienku $x < y < z$ platí $f(y) \cdot (z - x) \leq f(z) \cdot (y - x) + f(x) \cdot (z - y)$. [1]

Definícia 2c. Nech $x_0 \in D(f)$. Funkciu $f(x)$ nazývame konvexnou v bode x_0 , ak existuje také okolie $O(x_0)$, že graf funkcie $f(x)$ leží v tomto okolí nad dotyčnicou (resp. na dotyčnici) ku grafu funkcie v bode $[x_0, f(x_0)]$. [2] Funkcia $f(x)$ je konvexná na intervale $I \subset D(f)$, ak je konvexná v každom bode $x_0 \in I$.

Pozrime sa na tieto definície z didaktického hľadiska. Definície 2a a 2b hovoria geometricky to isté. Funkcia $f(x)$ je konvexná na intervale I , ak na tomto intervale pre ľubovoľné tri body $x < y < z$ platí: bod $[y, f(y)]$ leží pod priamkou spájajúcou body $[x, f(x)]$ a $[z, f(z)]$ (t.j. graf funkcie leží pod sečnicou). Geometrický význam definície 2c je zrejmý. Z pohľadu matematika je asi „najkrajšia“ definícia 2a, ktorá má najjednoduchší tvar, ale pre väčšinu študentov techniky je príliš abstraktná. Definícia 2b je tiež pochopiteľná len veľmi ťažko. Posledná definícia je najzrozumiteľnejšia, jej nedostatkom je však to, že berie do úvahy iba diferencovateľné funkcie. Podľa nej neurčíme napríklad konvexnosť funkcie $y = |x|$ v bode $x_0 = 0$.

Pripomeniem ešte jeden podstatný rozdiel oproti monotónnym funkciám. Ak funkcia $f(x)$ je konvexná na otvorenom intervale I , potom je spojitá na tomto intervale a existuje najviac spočítateľne veľa bodov z intervalu I , v ktorých táto funkcia nie je diferencovateľná. [3]

Záver

Vlastnosti funkcií, ktorými sa článok zaoberá, sú súčasťou matematiky na všetkých technických fakultách. Často sa však (aj pre nedostatok času), učia len „kuchárske recepty“, ako vypočítať jednotlivé príklady. Pre lepšie pochopenie problematiky by však bolo dobré spomenúť aj niečo viac o týchto pojmoch (aspoň v poznámkach alebo v príkladoch).

Literatúra

1. KLUVÁNEK, I., MIŠÍK, L., ŠVEC, M. *Matematika I.* Bratislava : Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, 1959, 734 s.
2. REKTORYS, K. a kol. *Přehled užití matematiky.* Praha : SNTL, 1981. 1139 s.
3. VAN ROOIJ, A. C. M., SCHIKHOF, W., H. *A second course on real functions.* Cambridge : Cambridge university press, 1982. 200 s. ISBN 0 521 28361.

Lektoroval: RNDr. Soňa Pavlíková, CSc.

Kontaktní adresa:

Renáta Masárová, RNDr., PhD.,
Katedra matematiky, UIAM ,
MTF STU, Hajdoczyho 1 , 917 24 Trnava, SR,
tel. 00421 33 55 11 033,
e-mail: renata.masarova@stuba.sk