

FLEXE, TORZE A FRENETŮV REPÉR V PROGRAMOVÉM PROSTŘEDÍ MATHEMATICA

FAJKUS Martin, ČR

Resumé

Článek je věnován programu, který zobrazuje uživatelem zadanou prostorovou křivku a vypočítá flexi a torzi ve zvoleném bodě této křivky. Uživatel dále může nechat zobrazit směrové vektory tečny, normály, nebo binormály v libovolném bodě křivky a pro názornost i malé letadlo letící podél křivky tak, jak uživatel plynule mění jeho pozici pomocí hodnoty parametru křivky.

Klíčová slova: křivost, flexe, torze, Frenetův repér, Mathematica

CURVATURE, TORSION AND THE FRENET FRAME IN THE MATHEMATICA ENVIRONMENT

Abstract

The article is dedicated to a program, which displays a user-defined 3D curve and calculates the curvature and the torsion at a chosen point of this curve. The user may let display tangent vector, normal vector and binormal vector at any point of the curve and also, for a good illustration, a small airplane flying along the curve as the user continuously changes its position by changing the value of the parameter of the curve.

Key words: curvature, torsion, Frenet frame, Mathematica

Úvod

Matematika jako věda je mnohými vnímána jako nezáživné počítání. Přitom výpočty jsou jenom jejími prostředky. Podstatou je porozumění, ke kterému vede představivost. Počítače pomáhají v obojím: urychlují výpočty a díky grafice pomáhají s představivostí.

Při studiu diferenciální geometrie prostorových křivek je často potřeba načrtnout křivku a vypočítat některé její charakteristiky jako jsou první křivost (flexe), druhá křivost (torze), vektory průvodního trojhranu (Frenetova repéru) a další. Počítačový program, kterému se věnuje tento článek, všechny tyto charakteristiky vypočítá a zobrazí. Uživatel tak získá názornou představu o jejich významu.

Další otázkou může být praktický význam těchto charakteristik. Křivost je pojem dost intuitivní, kdežto torze skoro neznámý. Přitom ale pokroucený kabel, jízda na horské dráze v zábavním parku, nebo akrobatické létání jsou známy všem; mnozí s nimi mají i přímou zkušenost. Trojúhelník s vrcholy v koncových bodech jednotkových vektorů Frenetova repéru, nebo malé letadélko a jeho let, který si uživatel může nechat zobrazit, jsou tedy názornou ukázkou křivosti (jak flexe, tak torze) prostorové křivky.

1. Některé pojmy z diferenciální geometrie prostorových křivek

Prostorová křivka může být zadaná bodovou funkcí, parametrickým vyjádřením, implicitně, nebo jako průnik dvou ploch. V článku jsou použity vztahy s parametrickým vyjádřením křivky, protože i popisovaný program pracuje s parametrickým vyjádřením.

I když se v literatuře nejčastěji jako parametr používá písmeno t , v této části je záměrně zvoleno písmeno τ . Je to proto, že symbolem $\vec{t}$ je označen směrový vektor tečny a symbol bez šipky, tedy t , by mohl představovat normu vektoru $\vec{t}$.

Nechť je tedy prostorová křivka zadána následujícím vztahem:

$$\vec{r}(\tau) = (\varphi(\tau), \chi(\tau), \psi(\tau)) \quad \tau \in R \quad (1)$$

Směrový vektor tečny se vypočítá pomocí první derivace, tedy:

$$\vec{t} = \vec{r}'(\tau) = (\varphi'(\tau), \chi'(\tau), \psi'(\tau)) \quad (2)$$

Pomocí druhé derivace se získá vektor

$$\vec{r}''(\tau) = (\varphi''(\tau), \chi''(\tau), \psi''(\tau)) \quad (3)$$

který leží v oskulační rovině, ale obecně nemusí být kolmý na $\vec{t}$. Pokud je vektor (3) ortogonalizován, představuje pak směrový vektor normály $\vec{n}$. Ortogonalizaci je možné učinit pomocí Gramova-Schmidtova ortogonalizačního procesu, nebo jednodušeji tak, že se nejprve pomocí vektorového součinu vektorů (2) a (3) vypočítá směrový vektor binormály $\vec{b}$:

$$\vec{b} = \vec{r}'(\tau) \times \vec{r}''(\tau) \quad (5)$$

a vektor $\vec{n}$ se následně vypočítá vektorovým součinem vektorů (2) a (4):

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t} \quad (6)$$

Křivosti, tedy flexi a torzi je možné vypočítat pomocí následujících vztahů:

$$\text{Flexe: } k_1(\tau) = \frac{|\vec{r}'(\tau) \times \vec{r}''(\tau)|}{|\vec{r}'(\tau)|^3} \quad (7)$$

$$\text{Torze: } k_2(\tau) = \frac{\begin{vmatrix} \varphi'(\tau) & \chi'(\tau) & \psi'(\tau) \\ \varphi''(\tau) & \chi''(\tau) & \psi''(\tau) \\ \varphi'''(\tau) & \chi'''(\tau) & \psi'''(\tau) \end{vmatrix}}{|\vec{r}'(\tau) \times \vec{r}''(\tau)|^2} \quad (8)$$

2. Popis programového kódu

Protože cílem příspěvku je představit program především z pohledu uživatele, bude programový kód popsán velmi stručně. Program se dělí na dvě základní části. V první části je předem zadána křivka – eliptická šroubovice – a jsou provedeny výpočty odpovídající vztahům (2) až (8). Vektory $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ jsou navíc ještě normovány.

Druhá část obsahuje příkazy, které zobrazují interaktivní prvky, jako jsou dialogová okna, zaškrtávací políčka a posuvník, dále příkazy, které zobrazují grafické prvky, především zadanou křivku a vektory Frenetova repéru a samozřejmě další. Ústředním příkazem je příkaz `Manipulate[]`, který umožňuje plynulou interaktivní změnu hodnoty zvolené proměnné.

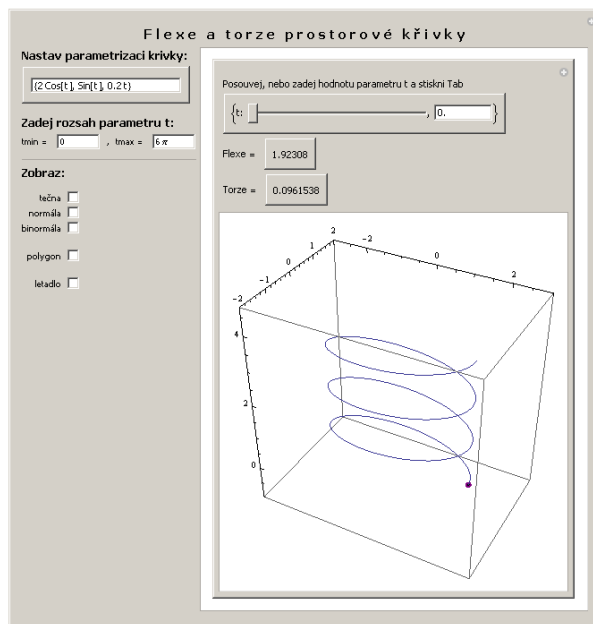
Uživatel může zadat libovolnou křivku, samozřejmě parametrizovanou daným parametrem, který tak představuje jednu z globálních proměnných. Navíc pak může ještě měnit hodnotu tohoto parametru, a proto musí být při změně hodnoty tento parametr chápán jako lokální proměnná. To je vyřešeno pomocí příkazu `DynamicModule[]`.

3. Popis programu z pohledu uživatele

Po spuštění programu se objeví panel jako na Obr. 1. Jeho levá část obsahuje interaktivní prvky: zaškrtávací políčka pro volbu zobrazení daného objektu a dialogová okna

pro zadání křivky (předem je nastavená eliptická šroubovice) a počáteční a konečné hodnoty parametru. Ty jsou přednastaveny na 0 a 6π .

V pravé části se nachází posuvník pro hodnotu parametru a dialogové okno s jeho aktuální hodnotou. Dále pak malé panely s hodnotami flexe a torze, které odpovídají aktuální hodnotě parametru. Protože tato hodnota leží v intervalu $\langle 0; 6\pi \rangle$, jsou v obrazové části zobrazeny tři závitů zadané šroubovice.



Obr. 1 – Úvodní panel při spuštění programu

Samotné ovládání programu je velice intuitivní. V hořejším dialogovém okně v levé části může uživatel změnit předem zadanou křivku. Musí ovšem dodržet syntaxi programového prostředí Mathematica, tedy především vektor ponechat ve složené závorce, názvy elementárních funkcí psát s velkým počátečním písmenem a jejich argument psát do hranaté závorky.

Ve dvou následujících dialogových oknech je možné měnit počáteční a konečnou hodnotu parametru. Přeje-li si uživatel napsat π , musí napsat Pi (opět s velkým počátečním písmenem), nebo použít kláves Esc+p+i+Esc.

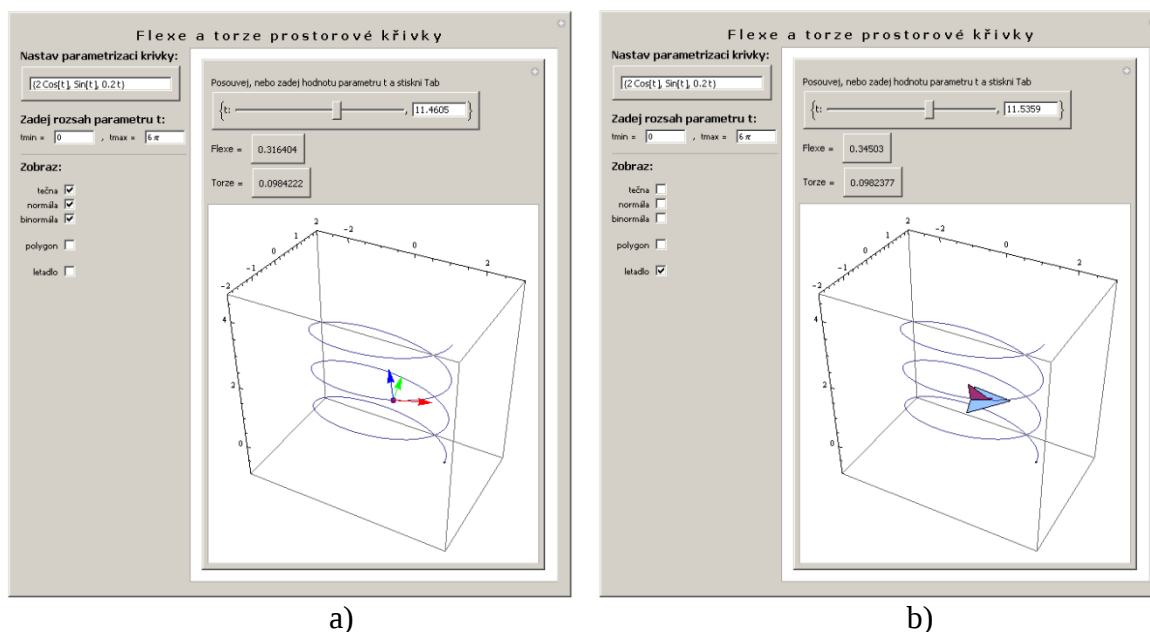
Velice důležité je uvědomit si, že po zadání hodnot do kteréhokoliv dialogového okna se nesmí stisknout klávesa Enter, ale Tab.

Zaškrtnutím příslušného políčka u nápisů *tečna*, *normála*, nebo *binormála* se zobrazí daný vektor Frenetova repéru. Je samozřejmě možné zaškrtnout třeba i všechny tři. Uživatel tak může uvidět situaci jako na Obr. 2a.

Zaškrtnutím políčka *polygon*, zobrazí se trojúhelník, jehož vrcholy leží v koncových bodech jednotlivých vektorů Frenetova repéru. A konečně volbou *letadlo* se zobrazí malé letadélko, jehož podélná osa je orientována ve směru tečny, křídla ve směru hlavní normály a směrové kormidlo ve směru binormály.

V pravé části nahoře může uživatel měnit hodnotu parametru a to buď plynule pomocí posuvníku, nebo opět zadáním konkrétní hodnoty do dialogového okna. Pod posuvníkem se nacházejí dva panely, na kterých se zobrazuje aktuální hodnota flexe a torze.

V obrazové části se vždy zobrazuje zadaná křivka se zvýrazněným bodem, který odpovídá aktuální hodnotě parametru. Z dalších výše popsanych prvků se zobrazují pouze ty, které uživatel zadal.



a) b)
Obr. 2 – Uživatelem zvolené zobrazení a) Frenetova repéru, b) letadélka

Závěr

Popsaný program může posloužit pedagogům při výuce diferenciální geometrie prostorových křivek, ale i studentům při studiu této matematické oblasti. Jeho hlavním úkolem není pouhé vypočítání základních charakteristik parametrizované křivky, ale jejich zobrazení. Uživatel tedy přímo vidí, jakou křivku představuje zvolená parametrizace, jak vypadají jednotlivé vektory průvodičního trojhranu a co představuje křivost – flexe, nebo torze.

Počtení dovednosti jsou samozřejmě nezbytné. Proto program rozhodně není náhradou pilného studia. Jistě ale představuje vhodný doplněk při studiu, nebo výuce.

Literatura

- 1 KREYSZIG, E. *Differential Geometry*. New York : Dover Publications, 1991, 366 s. ISBN 13:978-0-486-66721-8
- 2 GRAY, A. a kol. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*. Boca Raton : Chapman&Hall/CRC, 2006. 984 s. ISBN 1-58488-448-7
- 3 DON, E. *Schaum's outlines - Mathematica, 2ed.* : McGraw-Hill, 2009. 359 s. ISBN 978-0-07-160828-2

Lektoroval: **RNDr. Dana Smetanová, Ph.D.**

Kontaktní adresa:

Martin Fajkus, RNDr. Ph.D.,
Ústav matematiky, Fakulta aplikované informatiky, Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně,
Nad Stráněmi 4511, 760 05 Zlín, ČR, tel. 00420 576 035 064,
e-mail: fajkus@fai.utb.cz