

INOVACE PŘEDMĚTŮ TECHNICKÁ MECHANIKA A HYDRAULIKA S UPLATNĚNÍM VAZBY NA MATEMATIKU

ŘÍHOVÁ Dana – KOTÁSKOVÁ Pavla – MARKOVÁ Jana, ČR

Resumé

Príspevek se zabývá využitím matematiky v předmětech Technická mechanika a Hydraulika. Byly vytvořeny studijní materiály, které na probírané látce demonstrují vzájemný vztah mezi oběma předměty a matematikou. Potřebný matematický aparát je v nich komentován na úrovni základního kurzu.

Klíčová slova: technická mechanika, hydraulika, matematika

INNOVATION OF SUBJECTS TECHNICAL MECHANICS AND HYDRAULICS USING THE RELATION TO MATHEMATICS

Abstract

This paper deals with the use of mathematics in the subjects Technical mechanics and Hydraulics. Study texts were created. They demonstrate the relationship between both subjects and mathematics using the discussed issues. Necessary mathematical tools are commented at the level of the basic course.

Keywords: technical mechanics, hydraulics, mathematics

Úvod

V rámci projektu Perspektivy krajinného managementu – inovace krajinářských disciplín (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/15.0080) byly v bakalářském studiu oboru Krajinářství na Lesnické a dřevařské fakultě Mendelovy univerzity v Brně inovovány předměty Technická mechanika a Hydraulika. Z inovovaných předmětů se tyto dva nejvíce opírají o matematické základy. Protože je v nich zapotřebí jisté úrovně matematických znalostí, vznikly podpůrné studijní materiály, které studentům vysvětlují a opakují použité matematické pojmy a ukazují využití matematiky.

1. Aplikace matematiky ve výuce Technické mechaniky

Technická mechanika je v oboru Krajinářství vyučována v zimním semestru 1. ročníku bakalářského studia souběžně s předmětem Matematika. Již v prvních týdnech výuky studenti ve cvičení používají ve výpočtech momenty setrvačnosti průřezů, které jsou odvozeny pomocí integrálů. Se znalostmi integrování, a to pouze integrálního počtu jedné proměnné, se však v matematice seznamují až v druhé polovině semestru.

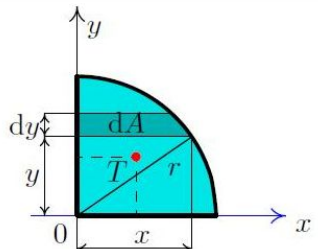
Proto byly vytvořeny prezentace a studijní texty, které tyto počáteční neznalosti studentů z matematiky doplňují. Pro zopakování učiva střední školy byly připraveny materiály s přehledem goniometrických funkcí, sinovou a kosinovou větou a následně předvedeno jejich využití v technické mechanice při skládání a rozkladu sil. Dále byly vypočteny statické momenty, těžiště a momenty setrvačnosti základních průřezů – obdélníku, čtverce, pravoúhlého a rovnoramenného trojúhelníku, čtvrtkruhu, půlkruhu, dutého obdélníku a mezikruží. Pro některé jednoduché průřezy byla ověřena Steinerova věta.

Všechny výpočty byly provedeny podobně jako v [1] pomocí jednoduchých určitých integrálů a na úrovni znalostí probíraných v předmětu Matematika. Výpočty byly doplněny

názornými obrázky. Pro důkladné pochopení souvislostí byly ve studijních materiálech zařazeny základní integrační vzorce a použité integrační metody. Odvozené vztahy pro momenty setrvačnosti a těžiště základních průřezů byly shrnuty v přehledné tabulce.

Určení těžiště průřezů pomocí statických momentů

Čtvrtkruh - výpočet statických momentů



$dA = x \, dy$ diferenciál plochy proužku

rovnice kružnice o poloměru r , středu $[0, 0]$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x = \sqrt{r^2 - y^2} \quad \text{pro } x \geq 0$$

$$dA = x \, dy = \sqrt{r^2 - y^2} \, dy$$

$$U_x = \int_A y \, dA = \int_0^r y \sqrt{r^2 - y^2} \, dy = \left. \begin{array}{l} t = r^2 - y^2 \\ dt = -2y \, dy \\ -\frac{1}{2} dt = y \, dy \\ y = 0 \Rightarrow t = r^2 \\ y = r \Rightarrow t = 0 \end{array} \right| = -\frac{1}{2} \int_{r^2}^0 \sqrt{t} \, dt =$$

$$= +\frac{1}{2} \int_0^{r^2} t^{\frac{1}{2}} \, dt = \frac{1}{2} \left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^{r^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \left[\sqrt{t^3} \right]_0^{r^2} = \frac{1}{3} \sqrt{r^6} = \frac{1}{3} r^3$$

Obr. 1. Ukázka části studijního materiálu předmětu Technická mechanika

2. Aplikace matematiky ve výuce Hydrauliky

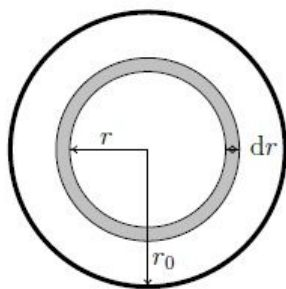
Hydraulika je vyučována v letním semestru 1. ročníku bakalářského studia a navazuje na předměty Technická mechanika a Matematika. Pro studium tohoto předmětu je nutné mít dobré matematické základy. V tomto případě vznikly studijní materiály, které doplňují probíraná témata na přednáškách. Slouží k hlubšímu pochopení látky a komentují použitý matematický aparát. Nezahrnují všechnu probíranou látku, ale pouze ty části, v nichž jsou odvozovány vzorce a kde jsou potřebné matematické znalosti. Všechny studované vztahy byly odvozeny postupně krok za krokem s vysvětlením a zopakováním použitých matematických pojmů, a to na úrovni znalostí předcházejícího předmětu Matematika. Šlo především o znalosti derivování, integrování, hledání extrémů a úpravy výrazů.

Zejména byla zpracována tato témata: tlaková síla na vodorovnou a šikmou rovinnou plochu, určení působíště hydrostatické tlakové síly, rozdělení rychlosti při rovnoměrném pohybu kapaliny v potrubí, rozdělení průtoku v příčném řezu potrubí, průtok v otevřeném profilu a odvození rovnice kontinuity, stanovení kritické hloubky pro jednotlivé základní tvary průtočného profilu, stanovení funkce prostého vodního skoku, určení výtoku malým otvorem ve dně a ve svislé stěně, určení výtoku velkým otvorem ve svislé stěně, přepad přes ostrou hranu, přepad přes praktickou hranu, přepad přes širokou korunu bez bočního zúžení, nerovnoměrné proudění v korytech, pohyb podzemní vody s volnou hladinou a vydatnost úplné obyčejné studny. Při tvorbě materiálů se vycházelo především z [2] a [3].

V některých případech kromě vazby na matematiku byly využity i znalosti z technické mechaniky, které byly ve studijních textech komentovány. Jednalo se o momentovou větu, Steinerovu větu, statické momenty a momenty setrvačnosti rovinné plochy.

Vzhledem k tomu, že i v hydraulice se používají goniometrické funkce, byla vytvořena samostatná prezentace a učební text s přehledem a zopakováním těchto funkcí, jakož i s jejich aplikacemi při rozkladu hydrostatické tlakové síly na horizontální a vertikální složku a průmětu tlačené plochy do svislé a vodorovné roviny.

Rozdělení průtoku v příčném řezu potrubí



Plocha kruhového průřezu o poloměru r_0 je $S = \pi r_0^2$

Plocha nekonečně tenkého mezikruží o poloměru r a tloušťce dr je $dS = \pi(r + dr)^2 - \pi r^2 = \pi(r^2 + 2r dr + dr^2) - \pi r^2 = 2\pi r dr + \pi dr^2$, použijeme-li vzorec $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Zanedbáme člen s druhou mocninou πdr^2 vzhledem k jeho nekonečně malému rozměru.

Plocha mezikruží (prstence) je pak přibližně $dS = 2\pi r dr$

Průtok Q potrubím uvažujeme jako součet průtoků elementárními prstenci o poloměru r a šířce dr

$$Q = \int_S u dS = \int_0^{r_0} u \cdot 2\pi \cdot r dr.$$

Integrál nahrazuje sumu přes nekonečně malé prstence o ploše $dS = 2\pi r dr$, poloměr se mění od 0 do r_0 . Ze vztahu $u_{max} = \frac{\rho \cdot g \cdot I}{4\mu} \cdot r_0^2$ vydělením r_0^2 vyjádříme výraz $\frac{\rho \cdot g \cdot I}{4\mu} = \frac{u_{max}}{r_0^2}$. Dosazením do vzorce pro rychlost kapaliny v potrubí máme

$$u = \frac{\rho \cdot g \cdot I}{4\mu} (r_0^2 - r^2) = \frac{u_{max}}{r_0^2} (r_0^2 - r^2).$$

Potom průtok

$$Q = \int_0^{r_0} u \cdot 2\pi \cdot r dr = \int_0^{r_0} \frac{u_{max}}{r_0^2} (r_0^2 - r^2) \cdot 2\pi \cdot r dr.$$

Nyní vytkneme konstanty před integrál (r_0 je daný poloměr potrubí a tudíž konstanta)

$$Q = \frac{2\pi \cdot u_{max}}{r_0^2} \int_0^{r_0} (r_0^2 - r^2) \cdot r dr = \frac{2\pi \cdot u_{max}}{r_0^2} \int_0^{r_0} (r_0^2 \cdot r - r^3) dr.$$

Integrací podle proměnné r , vzorců

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad \text{tj.} \quad \int r dr = \frac{r^2}{2} + c, \quad \int r^3 dr = \frac{r^4}{4} + c,$$

a podle Newton - Leibnizovy formule pro výpočet určitého integrálu dostaneme

$$Q = \frac{2\pi \cdot u_{max}}{r_0^2} \left[r_0^2 \cdot \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^{r_0} = \frac{2\pi \cdot u_{max}}{r_0^2} \left(\frac{r_0^4}{2} - \frac{r_0^4}{4} \right) = \frac{2\pi \cdot u_{max}}{r_0^2} \cdot \frac{r_0^4}{4} = \frac{\pi \cdot r_0^2}{2} \cdot u_{max}.$$

Střední profilová rychlost průřezu (o ploše $S = \pi r_0^2$) se tedy rovná

$$\nu = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\pi \cdot r_0^2} = \frac{\frac{\pi \cdot r_0^2}{2} \cdot u_{max}}{\pi \cdot r_0^2} = \frac{1}{2} u_{max}$$

Obr. 2. Ukázka části studijního materiálu předmětu Hydraulika

Závěr

Vytvořené materiály by měly studentům pomoci k snazšímu studiu předmětů Technická mechanika a Hydraulika a vést k hlubšímu pochopení studovaných zákonitostí.

Ukazují využití matematického aparátu v obou předmětech a slouží k uvědomění si souvislosti mezi všemi třemi předměty. Přínosem vzniklých materiálů je zefektivnění výuky základních technických předmětů a vytvoření mezipředmětové vazby na matematiku.

Příspěvek vznikl v rámci projektu Perspektivy krajinného managementu – inovace krajinářských disciplín (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/15.0080) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Literatura

- 1 KOMPAN, F., BARTOŠ, Z., FABIANOVÁ, A. *Technická mechanika*. Bratislava : Příroda, 1990, 391 s. ISBN 80-07-00269-3.
- 2 KREŠL, J. *Hydraulika*. Brno : Mendelova univerzita v Brně, 2001, 59 s. ISBN 80-7157-490-2.
- 3 JANDORA, J., STARA, V., STARÝ, M. *Hydraulika a hydrologie*. Brno : CERM, 2002, 188 s. ISBN 978-80-7204-739-0.
- 4 REKTORYS, K. a kol. *Přehled užití matematiky I*. Praha : Prometheus, 2009, 720 s. ISBN 978-80-7196-180-2.

Lektoroval: **RNDr. Jan Ostravský, CSc.**

Kontaktní adresa:

Dana Řihová, RNDr. Ph.D.,

Ústav matematiky, Lesnická a dřevařská fakulta, Mendelova univerzita, Zemědělská 3, 61300 Brno, ČR, tel. 00420 545 134 032, e-mail: dana.rihova@mendelu.cz

Pavla Kotásková, Ing. Ph.D.,

Ústav inženýrských staveb, tvorby a ochrany krajiny, Lesnická a dřevařská fakulta, Mendelova univerzita, Zemědělská 3, 61300 Brno, ČR, tel. 00420 545 134 010, e-mail: pavlakot@mendelu.cz

Jana Marková, Ing. Ph.D.,

Ústav inženýrských staveb, tvorby a ochrany krajiny, Lesnická a dřevařská fakulta, Mendelova univerzita, Zemědělská 3, 613 00 Brno, ČR, tel. 00420 545 134 009, e-mail:

jana.markova@mendelu.cz