

SÚ TO LEN OBYČAJNÉ KONŠTANTY ALEBO...

TRUBENOVÁ Jaroslava, SR

Resumé

Predkladaný príspevok predstavuje prvú časť zo série článkov autorky venovaných historickým aspektom známych a často používaných pojmov matematiky v prírodných a technických vedách.

Kľúčové slová: história matematiky, definícia konštanty zlatého rezu, konštrukcia a aplikácie konštanty zlatého rezu

ARE THEY JUST ORDINARY CONSTANTS OR...

Abstract

This article represents the first part of the series of the author's articles devoted to historical aspects of the familiar and frequently used mathematical notions in natural and technical sciences.

Key words: history of mathematics, definition of the golden section constant, construction and applications of the golden section constant

Úvod

V prírodných a technických vedách veľmi často samozrejme používame rôzne konštanty – Eulerovo číslo, Ludolfovo číslo, konštanta zlatého rezu a mnoho iných bez toho, aby sme videli a poznali historické aspekty a motívy, ktoré k zavedeniu daných konštánt viedli. Z didaktického hľadiska je vhodné oboznámiť študentov prírodných a technických odborov s historickým pozadím zavedenia jednotlivých konštánt. Príspevok sa venuje jednej z najzaujímavejšej z uvedených konštánt – konštante zlatého rezu.

Zlatý rez (anglicky golden ratio, golden proportion, golden section, latinsky sectio aurea) je veľmi zaujímavá matematická konštanta, ktorá ľudstvo po stáletia fascinuje svojou všeobecnosťou a harmóniou. Zlatý rez je najčastejšie vnímaný ako ideálny pomer medzi dvoma úsečkami. Stretávame sa tiež s označením zlatý pomer, zlaté číslo alebo zlatá proporcia.

Okolo zlatého rezu vznikla celá návodná literatúra, ako s jeho pomocou zostrojiť najkrajší trojuholník, najkrajší pôdorys budovy, nakresliť telo s najkrajšími proporciami v celku i v detailoch. Neexistuje vraj dobrý obraz bez vedomého či podvedomého použitia zlatého rezu v jeho rozvrhnutí a kompozícii. A ešte ďaleko viac: bez dôsledného použitia zlatého rezu nemôžu vraj vzniknúť dobré husle ani dobrá dráma. Ba ani to nestačí, zlatý rez je kozmickým zákonom, prejavujúcim sa i v prírode napríklad v anatómii rastlín, v chémii v kryštalických štruktúrach a zložení zlúčenín, v astronómii, v polohách hviezd a planét.

1. História

Zlatý rez, presnejšie pomer zlatého rezu, patrí medzi klasické pojmy matematiky. Fenomén zlatého rezu kráča storočiami a kultúrami. Je možné, že pomer založený na zlatom reze používali už Egypťania pri stavbe pyramíd. Rhindov papyrus (asi 1788–1580 pred n.l.) uvádza: „V pyramídach je utajený tajomný kvocient nazvaný seqt“.

Predpokladá sa, že už Pythagoras alebo jeho žiaci boli so zlatým rezom oboznámení, keďže zlatý rez pravdepodobne používali pri konštrukcii pentagramu a aj iných

geometrických útvarov. Prvé písomné zmienky pochádzajú však až z antiky od Euklida (asi 340 – 287 pred n. l.), ktorý jednoznačne definoval zlatý rez vo svojom diele Základy. Zlatý rez nazval ako "krajný a stredný pomer". Antický matematik Euklides riešil úlohu: rozdeliť úsečku na dve časti tak, aby pomer dĺžky dlhšej časti ku dĺžke kratšej časti bol rovnaký, ako pomer dĺžky celej úsečky k dĺžke dlhšej časti. Poznáme aj inú formuláciu úlohy: Rozdeľte danú úsečku na dve nerovnaké časti tak, aby štvorec zostrojený nad väčšou časťou mal rovnaký obsah ako obdĺžnik, ktorého jedna strana má dĺžku rovnú dĺžke pôvodnej celej úsečky a druhá strana má dĺžku menšej časti pôvodnej úsečky. Riešením tejto úlohy je práve rozdelenie úsečky v pomere zlatého rezu. Je to úloha na svoju dobu veľmi obtiažna, pretože v tom čase ešte matematika nepozná algebru, algebraické výpočty. O zlatom reze potom dlho nie sú žiadne písomné pamiatky. Fenomén zlatého rezu sa vracia až v období renesancie, ktorá sa opierala o antickú kultúru. V tomto období bol zlatý rez stelesnením božskej logiky, bol nazvaný božským pomerom (divina proportio). Luca Pacioli, renesančný matematik je autorom diela „O božskom pomere“ (1509). Toto dielo obsahuje zaujímavý súbor príkladov výskytu pomeru zlatého rezu v rovinných obrazoch a telesách, skúma zlatý rez z pohľadu matematiky ale i umenia a metafyziky a toto jeho dielo bolo ilustrované samotným Leonardom da Vincim. Uvedené dielo bolo vydané v krásnej úprave znovu v roku 1956.

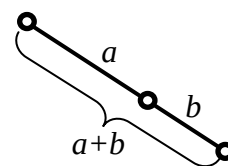
Stredoveký matematik Fibonacci (Leonardo Pisano) prispel svojimi výpočtami (Fibonacciho čísla) k matematickému podloženiu konštanty zlatého rezu. Údajne pritom vychádzal z legendy o počiatku ľudského rodu. Vytvoril číselnú postupnosť vyjadrujúcu nárast generácií: prišiel k tomu, že v prvej generácii bola jedna dospelá dvojica, v druhej už 2 dvojice, mladá a dospelá, v tretej generácii zase dve dospelé a jeden mladý pár. Celkom mu potom vyšlo, že počet dospelých párov rastie nasledovne: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ... Pravidlo je jednoduché, prvé dva členy sú dané, jednotka a jednotka, každý ďalší člen je potom súčtom dvoch predchádzajúcich členov. Rad čísel sa vyznačoval zvláštnosťou. Pomer každých dvoch po sebe idúcich členov: $1/1$, $2/1$, $3/2$, $5/3$, $8/5$, $13/8$, $21/13$, $34/21$, $55/34$, $89/55$, $144/89$, $233/144$, $377/233$, ... sa neodvratne blížil k číslu 1.61803398... Fibonacci toto číslo nazval božskou proporciou, pretože z legendy vyplývalo, že množiť sa podľa tohto pomeru zostalo výsadou bohov. Termín "božská proporcia alebo božský pomer" (divina proportia) bol použitý aj vo vzťahu k dielam Leonarda da Vinci. Zlatý rez – presnejšie pomer zlatého rezu nájdeme na obrazoch napr. Posledná večera od Leonarda da Vinciho, v architektúre: chrám Notre – Dame v Paríži, v designe – výroba hudobných nástrojov. V 20. storočí sa zlatým rezom zaoberal napr. architekt a maliar Le Corbusier (1887 – 1965), ktorý sa snažil vytvoriť univerzálnu proporčnú jednotku.

2. Definícia zlatého rezu

Predgrécke národy presnú konštrukciu zlatého rezu nevedeli. Starí Gréci – ako už bolo spomenuté - nedokázali pomer zlatého rezu vypočítať, ale vedeli ho narysovať. Aké je teda hodnota tohto čísla - konštanty zlatého pomeru? Vydeme z prvej známej exaktnej definície pojmu.

Prvá exaktná a jednoznačná definícia pojmu: rozdeľ úsečku (Obr. 1) dĺžky x na dve časti a , b , $x = a + b$, tak aby pomer dĺžky dlhšej časti ku dĺžke kratšej časti bol rovnaký ako pomer dĺžky celej úsečky k dĺžke dlhšej časti. Matematicky $\frac{a}{b} = \frac{x}{a}$ pre $a > b$. Keďže úsečka x sa skladá z častí a a b , môžeme dosadiť $x = a + b$ a dostaneme

$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \varphi$. Po úprave dostaneme rovnice v tvare



Obr. 1

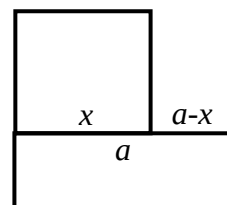
$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \quad (1)$$

Riešením kvadratickej rovnice (1) sú dva korene

$$\varphi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618033988..., \quad \varphi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,618033988... \quad (2)$$

Číslo φ_1 je tiež jediným pozitívnym číslom, ktoré vyhovuje rovnici (1).

Zlatý rez, presnejšie hodnota pomeru zlatého rezu je iracionálne číslo a nemožno ho teda zapísať konečným počtom číslic. Označenie konštanty zlatého rezu písmenom φ sa používalo na počesť gréckeho sochára Feidia. Ako už bolo uvedené, v diele Základy sa nachádza úloha aj v inej modifikácii (Obr. 2). Po matematickej formulácii a úpravách dostaneme rovnicu pre nájdenie pomeru zlatého rezu úsečky. Strana štvorca a obdĺžnika sú časťami úsečky dĺžky a a rozdelené zlatým rezom.



Obr. 2

3. Vlastnosti konštanty zlatého rezu

Teraz, keď už poznáme hodnotu pomeru zlatého rezu a hodnotu druhého koreňa (2) rovnice (1), budeme sa zaoberať niektorými jeho zaujímavými vlastnosťami, ktoré sa dajú dokázať:

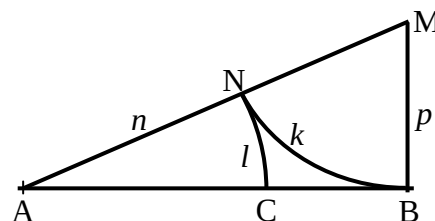
a) $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1 = 0,618033988...$, b) $\varphi_1 \cdot \varphi_2 = -1$, c) $\varphi^2 = \varphi + 1$, d) $\varphi^3 = \frac{\varphi + 1}{\varphi - 1}$, e) $\varphi = \frac{\varphi^3 + 1}{\varphi^3 - 1}$.

4. Konštrukcia zlatého rezu

Poznáme niekoľko variant geometrickej konštrukcie pomeru zlatého rezu. Uvádžeme najjednoduchšiu a najnázornejšiu z nich.

Úloha: na úsečke AB (ľubovoľnej dĺžky) nájsť bod C tak, aby bod C delil úsečku AB zlatým rezom.

Postup konštrukcie (Obr.3):



Obr. 3

1. narysujeme priamku p ; $p \perp AB, B \in p$

2. nájdeme bod M; $M \in p, |MB| = \frac{1}{2}|AB|$

5. nájdeme bod N; $N \in k \cap m$

3. narysujeme priamku m ; $A \in m, M \in m$

6. zostrojíme kružnicu l ; $l(A, r = |AN|)$

4. zostrojíme kružnicu k ; $k(M, r = |MB|)$

7. nájdeme bod C; $C \in l \cap AB$

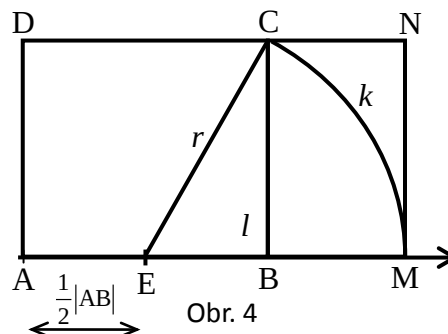
Bod C delí úsečku AB zlatým pomerom.

5. Zlatý rez v matematike, architektúre, umení a prírode

Zlatý obdĺžnik

Zlatý obdĺžnik je obdĺžnik (Obr. 4), ktorého dĺžky strán sú v pomere zlatého rezu. Každý zlatý obdĺžnik je možné rozdeliť na štvorec a ďalší zlatý obdĺžnik. Zlatý obdĺžnik môžeme zo štvorca skonštruovať takto:

Zostrojíme štvorec ABCD, ktorý chceme rozšíriť na zlatý obdĺžnik

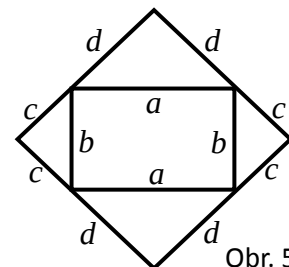


Obr. 4

1. Úsečku AB predĺžime na polpriamku.
2. V polovici úsečky AB zostrojíme bod E.
3. Zostrojíme kružnicu k so stredom v bode E a polomerom r rovným dĺžke úsečky CE.
4. Prienik kružnice k a polpriamky AB označíme ako bod M.
5. Obdĺžnik AMND je zlatý obdĺžnik, teda dĺžky úsečiek AM a MN sú v zlatom pomere.
6. Dĺžky úsečiek AM a AB sú v zlatom pomere.

Zlatý obdĺžnik má rad zaujímavých vlastností. Uvedieme si niektoré z nich:

a) ak vpíšeme zlatý obdĺžnik do štvorca (ľubovoľného), vrcholy obdĺžnika potom delia strany štvorca zlatým rezom (Obr. 5)

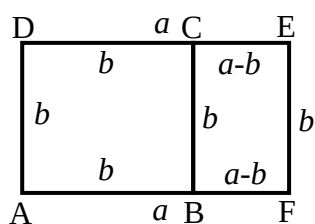


Obr. 5

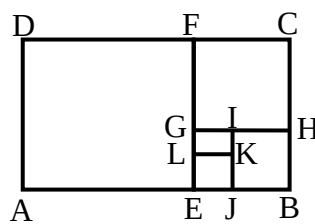
b) ak oddelíme od zlatého obdĺžnika ABCD ($a \times b$) štvorec AEFD ($b \times b$), obdĺžnik ktorý ostane BCFE ($b \times a - b$) je opäť zlatý (Obr. 6)

c) v oddeľovaní štvorcov môžeme rovnakým spôsobom pokračovať – získame nové zlaté obdĺžniky EBHG, EGIJ, GIKL, (Obr. 7) atď.

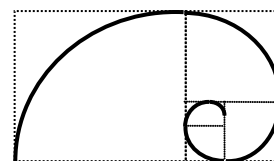
d) ak oddeľovanie štvorca zo zlatého obdĺžnika prevedieme niekoľkokrát body vyznačujúce postupne zlaté rezy (A, F, H, J, L, ...) ležia na špirále – táto špirála sa nazýva zlatá špirála (Obr. 8)



Obr. 6



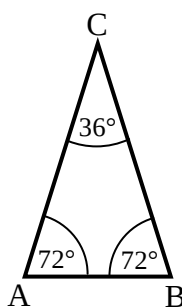
Obr. 7



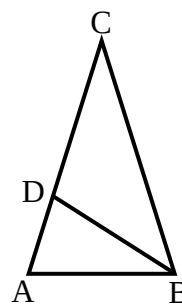
Obr. 8

Zlatý trojuholník

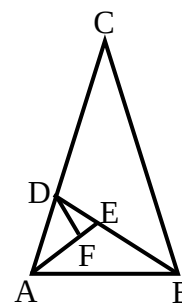
Zlatý trojuholník je taký rovnoramenný trojuholník, v ktorom je pomer dĺžky ramena a dĺžky základne rovný pomeru zlatého rezu (Obr. 9). Pokiaľ do zlatého trojuholníka ABC postupne vpisujeme rovnoramenné trojuholníky, ktoré majú ako jedno rameno základňu predchádzajúceho zlatého trojuholníka (Obr. 10, 11), bude každý z týchto trojuholníkov (trojuholník DAB, trojuholník FED, ...) zlatý a vrcholy zlatých trojuholníkov ležia na špirále – táto špirála sa nazýva zlatá špirála.



Obr. 9



Obr. 10



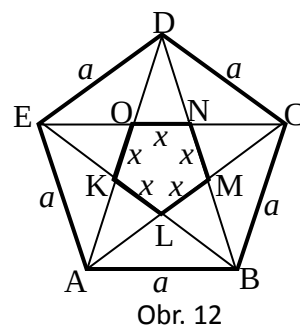
Obr. 11

Päťuholník

Ďalším bohatým zdrojom zlatých pomerov je pravidelný päťuholník (Obr. 12). Ľahko sa dajú overiť nasledujúce vlastnosti:

1. Uhlopriečky v pravidelnom päťuholníku sa pretínajú v pomere zlatého rezu.

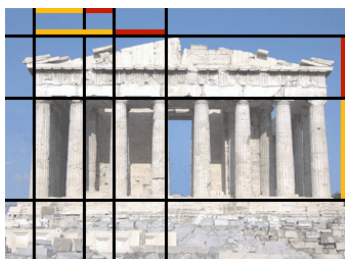
2. Pomer uhlopriečky a strany pravidelného päťuholníka je zlatý.
3. Ak zostrojíme všetky uhlopriečky tohto pravidelného päťuholníka, dostaneme päťcípú hviezdú, vo vnútri je opäť pravidelný päťuholník a platí, že priesečníky uhlopriečok pravidelného päťuholníka ABCDE sú vrcholy pravidelného päťuholníka KLMNO. Potom pomer strán pôvodného a nového päťuholníka je druhá odmocnina zlatého čísla.



Pentagram (*penta* - päť, *grame* - čiara) je päťcípá hviezda nakreslená jedným ťahom. Pentagram mali Gréci vo veľkej úcte, pretože názorne predstavoval to, čo nevedeli vyjadriť číselným pomerom. Pythagorejci si za znak svojho tajného bratstva zvolili pentagram.

Konštanta zlatého rezu sa veľmi dlho používa v architektúre. Proporcie v zlatom pomere môžeme nájsť takmer vo všetkých významných stavbách po celom svete. Využívajú sa napríklad základne v tvare zlatého obdĺžnika, okná a dvere sa rozmiestňujú podľa zlatého pomeru a pod.

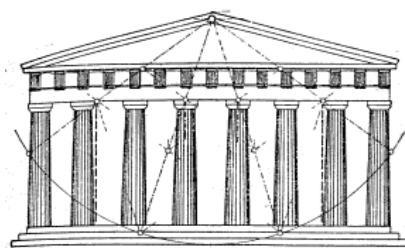
Starí Gréci konštantu zlatého rezu poznali a architekti Itkinos a Kaligrates ho mohli použiť pri stavbe chrámu Parthenón na Akropole (Obr. 13, 14, 15).



Obr. 13



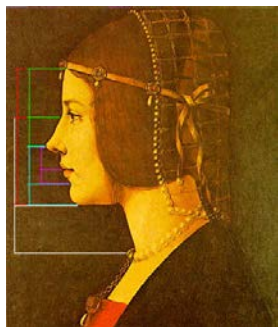
Obr. 14



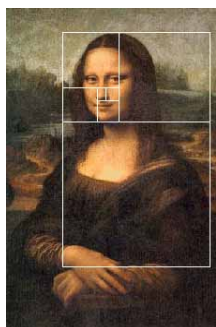
Obr. 15

Do priečelia Parthenónu možno zakresliť časť pravidelného desaťuholníka, ktorý má súvislosť so zlatým rezom. Starogrécki architekti mali svojich pokračovateľov aj mnoho neskôr, napr. v gotike pri stavbe chrámu Notre Dame v Paríži, v kompozícii fasád chrámov ruskej architektúry 12. storočia, v dielach architekta Le Corbusiera alebo v architektúre budovy Organizácie spojených národov v New Yorku.

Francúzsky architekt Le Corbusier (1887 – 1965) v diele Modulor sformuloval nový proporčný systém, ktorý sa opiera o miery človeka a princíp zlatého rezu, ktorý podľa neho dáva do súladu každú vec s celkom.



Obr. 16



Obr. 17



Obr. 18

V mnohých dielach Leonarda da Vinci (1452 – 1519) môžeme nájsť uplatnenie zlatého rezu, napr. portrét Beatrice d'Este – manželke Lodovica Mora, Mona Lisa, Posledná večera a mnohých ďalších (Obr. 16-18).

Znalosť hodnoty zlatého rezu nie je k bežnému životu nutná, je však zaujímavé ako sa pomerom zlatého rezu riadi príroda. Ulita slimákov a ostatných ulitníkov má tvar logaritmickkej špirály (Obr. 19), ktorá je odvodená (ako sme si už ukázali) zo zlatého rezu. Jedine u takejto špirály môžu mať všetky bunky úplne rovnaký tvar - iba sú stále väčšie a väčšie, takže živočích ak podrastie, vybuduje si ďalšiu bunku a presťahuje sa do nej, pričom nová bunka presne zodpovedá pôvodnému tvaru ulitníka.



Obr. 19

Hmyz nalietať na svoj cieľ po logaritmickkej špirále (najlepšie to vidíme u nočného hmyzu nalietavajúceho na svetlo). Prečo? Hmyz má oči po stranách a každé oko vidí len svoju stranu. Ak hmyz zazrie svoj cieľ v jednom oku, vždy ho vidí pred sebou pod určitým uhlom a v tomto uhle sa postupne približuje k svojmu cieľu. Krivka, ktorú pritom opisuje je logaritmická špirála, ktorú môžeme odvodiť zo zlatého rezu. Ďalším prejavom zlatého rezu je napríklad usporiadanie semien slnečnice, alebo smrekové šišky, kde sú jednotlivé šupiny rozmiestnené ako po špirále, takéto rozmiestnenie je možno pozorovať aj pri ananáse.

Záver

Zlatý rez je len jedno konkrétne číslo. Je to možno sklamanie, ale tento honosný názov naozaj nesie jedno konkrétne číslo. Ako je z predchádzajúceho textu vidieť, o zlatom reze je možné uviesť mnoho zaujímavostí. Nie je však potrebné týmto poznatkom prisudzovať nádyh mysticismu a tajuplnosti. Ide v podstate o úplne reálne problémy, zaujímavé nielen z matematického, historického ale aj estetického hľadiska. Dôležité však je, že aj v dnešnej dobe majú svoje uplatnenia, samozrejme, nejedná sa len o ich matematickú podstatu, ale najmä o skutočnosť, že zlatý rez a jeho využitie môžeme nájsť v mnohých odboroch mimo matematiky, čo znamená, že matematika nie je veda uzavretá sama do seba a sama pre seba, ale jej aplikácie zasahujú do mnohých rozličných oblastí nielen technických ale aj humanitných.

Zoznam výskytu zlatého rezu na rastlinách, schránkach mäkkýšov, v kryštalických štruktúrach látok, dokonca aj na ľudskom tele by bol veľmi obsiahly. Napriek tomu, že mnohí z nás o zlatom reze nevedia, naše oko je na toto číslo zvyknuté a pomer zlatého rezu vnímame ako prirodzenú vec. Preto sa v súčasnosti využíva v architektúre, designe, maliarstve alebo pri tvorbe fotografií.

Zlatý rez ako kompozičný princíp sa uplatňuje vo fotografickej tvorbe, v dizajne webových stránok - v tvorbe logotypov, v usporiadaní stránok, pomeroch a umiestnení ich jednotlivých častí. V typografii a grafike je tento pomer veľmi častý - písma v zlatom reze sa najlepšie čítajú, dôležitú úlohu hrá aj v usporiadaní stránky. Človek sa k zlatému rezu prikláňa celkom intuitívne, cíti v ňom prirodzenosť, akýsi známy prvok, ktorý dielo poľudšťuje a dodáva mu harmóniu a vyváženosť.

Vlastnosť zlatého rezu objavovať sa na zdanlivo nesúvisiacich miestach značnou mierou prispela k jeho mystifikácii. Je zlatý rez univerzálny kľúč k poznaniu alebo je to len náhoda?

Mario Livio v diele Zlatý rez síce demystifikuje zlatý rez, ale viac otázok kladie, než zodpovedá. Jeho názory na problematiku zlatého rezu by sa dali vyjadriť vetou: Prestaňme sa zlatému rezu klaňať a začnite o ňom uvažovať.

Literatúra

- 1 HONČARIVOVÍ, R. a K. *Matematické obrazy života*. Bratislava 1989
- 2 ZNÁM, Š. a kol. : *Pohlád do dejín matematiky*. Bratislava 1986
- 3 CHARVAT, F., ŠMELHAUS, J. *Populární encyklopedie matematiky*, SNTL, Praha 1971
- 4 KOWAL, S. (1985): *Matematika pro volné chvíle*. SNTL, Praha 1985
- 5 OPAVA, Z. *Matematika kolem nás*. Albatros, Praha 1989
- 6 REKTORYS, K. *Přehled užite matematiky*. SNTL, Praha 1981
- 7 VINCENT, R. *Geometrie du nombre d'or*. Chalagam Edition, Marseille 2001

Lektoroval: **doc. Ing. Marian Kubliha, PhD.**

Kontaktná adresa:

Jaroslava Trubenová, RNDr., PhD.,
Katedra aplikovanej informatiky a matematiky, FPV, Univerzita sv. Cyrila a Metoda v Trnave, Nám. J.
Herdu 2, Trnava, SR, tel. 00421 033 55 65 377,
e-mail: jaroslava.trubenova@ucm.sk